ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 99.

Α2. α. Η πρόταση είναι ψευδής.

β. Η συνάρτηση f(x)=$\begin{cases} x & ,x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 116.

Α4. **α)** Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσημη στο R – {0} με f ΄(x)=$\left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$

• f ΄(x)=0⇔x^3+8=0⇔x= -2.

• Οι ρίζες και το πρόσημο της f ΄ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞	-2		0	+∞
f ΄(x)	+	0	-	‖	+
f(x)	↗	$\boxed{-3}$ T.M	↘	‖	↗

f ΄(x)>0 για κάθε x∈(-∞, -2) άρα η f γν. αύξουσα στο (-∞, -2].

f ΄(x)<0 για κάθε x∈(-2, 0) άρα η f γν. φθίνουσα στο [-2, 0).

f ΄(x)>0 για κάθε x∈(0, +∞) άρα η f γν. αύξουσα στο (0, +∞).

Στο x= -2 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(-2)= -3.

B2. Η f ΄ είναι παραγωγίσημη στο R - {0} με f ΄΄(x)=$\left(1+\frac{8}{x^3}\right)'=\frac{-24}{x^4}<0$ για κάθε x∈ R - {0} οπότε η f είναι κοίλη στο (-∞, 0) και στο (0, +∞).

Σημεία καμπής δεν υπάρχουν.

B3. Για x→ +∞ ο τύπος της ασύμπτωτης είναι y=λx+β.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1=\lambda$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2}=0=\beta$

Άρα η y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

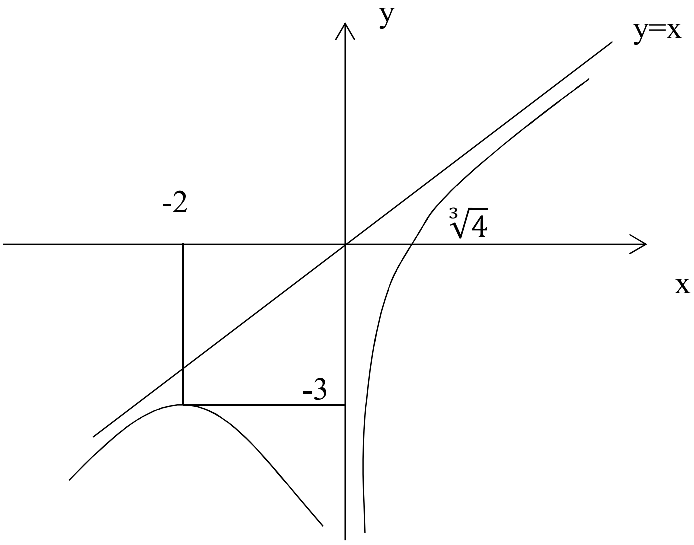
Όμοια η y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο -∞.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ (αφού $\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{x^2}=+\infty$) η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

B4. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	-∞	-2	0	+∞
f ΄(x)	+	-	‖	+
f ΄΄(x)	-	-	‖	-
f(x)	-∞ ↗	$\boxed{-3}$	↘ -∞ ‖ -∞	↗ +∞

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}$, x>0 οπότε εμβαδόν τετραγώνου $E_1=\frac{x^2}{16}$.

Το υπόλοιπο τμήμα του σύρματος είναι 8-x μέτρα, 8-x>0⇔x<8.

Το μήκος του κύκλου είναι L=2πρ οπότε 8-x=2πρ⇔$\rho=\frac{8-x}{2\pi}$.

Άρα το εμβαδόν του κύκλου είναι

$$E_2=\pi\cdot\rho^2=\pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\cdot\frac{64-16x+x^2}{4\pi^2}=\frac{64-16x+x^2}{4\pi}.$$

Άρα $E_{ολ}=E_1+E_2=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$

Οπότε $E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, 0<x<8.

Γ2. $E'(x)=\frac{1}{16\pi}(2\cdot(\pi+4)x-64)$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$

Οι ρίζες και το πρόσημο της Ε΄ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
Ε΄		-	0	+	
Ε	16/π	↘	Ο.Ε $\frac{16}{\pi+4}$	↗	4

Άρα το άθροισμα των εμβαδών γίνεται ελάχιστο για $x=\frac{32}{\pi+4}$ m.

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}=\frac{8}{\pi+4}$ m.

Ενώ η διάμετρος του κύκλου είναι $\delta=2\rho=\frac{8}{\pi+4}$ m.

Οπότε η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση E(x)=5 έχει μοναδική ρίζα στο (0,8).

- Έστω $A_1=(0,\frac{32}{\pi+4}]$

Η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 οπότε $E(A_1)=[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi})$.

Ο αριθμός $5 \in E(A_1)$ άρα η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική ρίζα στο A_1.

• Έστω $A_2=[\frac{32}{\pi+4},8)$

Η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 οπότε $E(A_2)=[\frac{16}{\pi+4},4)$.

Ο αριθμός $5 \notin E(A_1)$ οπότε η εξίσωση $E(x)=5$ δεν έχει ρίζα στο A_2. Οπότε η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 8)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in R$ έχουμε

$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και $f''(x)= 2e^{x-\alpha}-2=2(e^{x-\alpha}-1)$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 2(e^{x-\alpha}-1)=0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1\Leftrightarrow x=\alpha$

$f''(x)>0\Leftrightarrow 2(e^{x-\alpha}-1)>0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1\Leftrightarrow x>\alpha$

$f''(x)<0\Leftrightarrow 2(e^{x-\alpha}-1)<0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}<1\Leftrightarrow x<\alpha$

Το πρόσημο της f'', η κυρτότητα της f και το σημείο καμπής της C_f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			$2-\alpha^2$ Σ.Κ		

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο α και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο το σημείο $(\alpha, 2-\alpha^2)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άρα για κάθε $\alpha>1$ η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Δ2.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2\,e^{x-\alpha}-2x) = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-\alpha} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x}-1\right)\right] = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-\alpha}}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x-\alpha})'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}e^{x-\alpha}=+\infty$$

• $f'(\alpha)=2(1-\alpha)$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty, \alpha]$.

Οπότε $f'(A_1)=[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x))=[2(1-\alpha), +\infty)$ και αφού $0\in f'(A_1)$ η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, \alpha)$ δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$.

Για $x<x_1$ ισχύει ότι $f'(x)>f'(x_1)=0$

Για $x_1<x<\alpha$ ισχύει $f'(x)<f'(x_1)=0$

Άρα στο x_1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[\alpha, +\infty)$.

Οπότε $f'(A_2)= [f'(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x))=[2(1-\alpha), +\infty)$ και αφού $0\in f'(A_2)$ η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(\alpha, +\infty)$ δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_2\in(\alpha, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$.

Για $\alpha<x<x_2$ ισχύει $f'(x)<f'(x_2)=0$

Για $x>x_2$ ισχύει $f'(x)>f'(x_2)=0$

Άρα στο x_2 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Δ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$\Delta= (\alpha, x_2)$ τότε $f(x)<f(\alpha)=2-\alpha^2$

Έχουμε $f(1)=2e^{1-\alpha}-1$

Αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$ και $\alpha>1$ τότε

$f'(\alpha)<f'(1)\Leftrightarrow 2-2\alpha<2e^{1-\alpha}-2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}>4-2\alpha \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}-1>3-2\alpha \Leftrightarrow f(1)>3-2\alpha$

Είναι $3-2\alpha>2-\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1>0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2>0$ που ισχύει $\alpha>1$.

Οπότε $f(x)<f(\alpha)<f(1)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2)

Δ4. Για $\alpha=2$ έχουμε $f(x)=2e^{x-2}-x^2$, $x\in R$.

Έχουμε $f'(x)= 2e^{x-2}-2x$, $x\in R$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(2, f(2))$ έχει εξίσωση

$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y= -2x+2$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ ισχύει $f(x) \geq -2x+2$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$

Για κάθε $x \in [2, 3]$ έχουμε $f(x) \geq -2x+2 \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$.

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\ dx$

Θέτουμε $\sqrt{x-2} = u$, οπότε $x=u^2+2$ και $dx=2u\ du$.

Για $x=2$ είναι $u=0$

Για $x=3$ είναι $u=1$

Άρα $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\ dx = \int_0^1 [-2(u^2+2)+2]u \cdot 2udu =$

$= \int_0^1 (-4u^4 - 4u^2)du = \left[-4\frac{u^5}{5} - 4\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

www.floropoulos.gr