

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

- i. Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[α, β]$ ισχύει: αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dt > 0$ τότε $f(x) > 0$ στο $[α, β]$.
- ii. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- iii. Ισχύει: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iv. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$.
- v. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot g(x)$ τότε υποχρεωτικά ισούτε με $f(2) \cdot g(2)$.

Μονάδες 10

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

α) Χαρακτηρίστε τον παραπάνω ισχυρισμό Αληθή ή Ψευδή.

Μονάδα 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

B1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2}{x} = 2$$

Γ1. Να βρείτε το $f(0)$ και το $f'(0)$.

Μονάδες 4

Γ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=0$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y=2x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του προηγούμενου ερωτήματος εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2\eta\mu x$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \eta\mu \frac{1}{x}$$

Μονάδες 4

Γ5. Αν $f(1)>0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{(f(x))^{2018} + 2}{x} + \frac{(f(x))^{2017}}{x-1} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2}$$

για κάθε $x>0$.

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f αν

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$2f(4x)+f(x)>3f(3x) \text{ για κάθε } x \geq e\sqrt{e}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $h(x)=a^x$ και της ευθείας $y=x$, για τις διάφορες τιμές του $a>0$.

Μονάδες 6

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ