

**•ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ:** Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42  
**•ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ:** Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Κυριακή 24 Οκτωβρίου 2010

**Ζήτημα 1<sup>ο</sup>**

- A. Θεωρία
- B. Θεωρία
- Γ.  $\alpha(\Sigma)$ ,  $\beta(\Lambda)$ ,  $\gamma(\Lambda)$ ,  $\delta(\Sigma)$

**Ζήτημα 2<sup>ο</sup>**

i)  $|(1-i)(x+yi)-2|=2$   
 $|(x+y-2)+(y-x)i|=2$   
 $\sqrt{(x+y-2)^2+(y-x)^2}=2$   
 $x^2+y^2-2x-2y=0$   
 $(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$   
 Κύκλος με  $K(1, 1)$ ,  $\rho=\sqrt{2}$

ii)  $|\omega+2i|=|\omega-2+4i|$   
 $|x+(y+2)i|=|(x-2)+(y+4)i|$   
 $\sqrt{x^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$   
 Ευθεία  $\varepsilon$ :  $y=x-4$

iii)  $|z-\omega|_{\min}=d(\kappa, \varepsilon)-p=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$   
 όπου  $d(\kappa, \varepsilon)=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

**Ζήτημα 3<sup>ο</sup>**

A. i)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{2x^2-5x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x-3)(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

ii) Θέτουμε  $u = f(x)$  Av  $x \rightarrow 1$ ,  $u = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) - 3f(x) - 2}{4f^2(x) - 1} = \lim_{u \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2u^2 - 3u - 2}{4u^2 - 1} = \lim_{u \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(u-2)(2u+1)}{(2u-1)(2u+1)} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{u-2}{2u-1} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4f^2(x)+3}-2}{2f(x)+1} = \lim_{u \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4u^2+3}-2}{2u+1} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(2u+1)(2u-1)}{(2u+1)(\sqrt{4u^2+3}+2)} = -\frac{1}{2}$$

B. i)  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} 2\sqrt{3x} = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (3+x) = 6 \end{array} \right\}$  Από Κ.Π.:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

ii) Για  $x < 3$ :  $2\sqrt{3x} - 6 \leq f(x) - 6 \leq x - 3$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3x} - 6}{x - 3} \geq \frac{f(x) - 6}{x - 3} \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2\sqrt{3x} - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12(x-3)}{(x-3)(2\sqrt{3x} + 6)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1$$

Από Κ.Π.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-6}{x-3} = 1$

#### Ζήτημα 4ο

A.  $-1 < 1$

$3 = f(-1) > f(1) = 2$  áρα η  $f$  και "1-1".

$$f(f(e^x - 2) - 2) = f(1)$$

$$f(e^x - 2) - 2 = 1$$

$$f(e^x - 2) = 3$$

$$f(e^x - 2) = f(-1)$$

$$e^x - 2 = -1$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$f(f^{-1}(f^{-1}(\ln x + 1) + 2)) < f(-1)$$

$$f^{-1}(\ln x + 1) + 2 < 3$$

$$f^{-1}(\ln x + 1) < 1$$

$$f(f^{-1}(\ln x + 1)) > f(1)$$

$$\ln x + 1 > 2$$

$$\ln x > 1$$

$$x > e$$

B. Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$

$$3^{x_1} < 3^{x_2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3^{x_1}} > \frac{1}{3^{x_2}} \\ + \\ -2x_1 > -2x_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3^{x_1}} - 2x_1 > \frac{1}{3^{x_2}} - 2x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η  $f$  ↗

$$(\frac{1}{3})^{x^2-9} - 2(x^2 - 9) = (\frac{1}{3})^{x-3} - 2x + 6$$

$$f(x^2 - 9) = f(x - 3)$$

$$x^2 - 9 = x - 3$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\text{Άρα } x = -2 \text{ ή } x = 3$$