

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελ. 28

A2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ. 87

A3. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 22

A4. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Έστω A το ενδεχόμενο «Ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα ποδόσφαιρο» και B το ενδεχόμενο «Ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα μπάσκετ», τότε από τα δεδομένα έχουμε:

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0,5, P(B') = \frac{55}{100} = 0,55 \text{ και } P(A \cap B) = \frac{25}{100} = 0,25$$

B1. Η πιθανότητα του ενδεχομένου «Ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα μπάσκετ» είναι $P(B)=1-P(B')=1-0,55=0,45$.

B2. Η πιθανότητα του ενδεχομένου «Ο μαθητής να μη συμμετέχει σε καμία από τις δύο ομάδες» είναι

$$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0,5 - 0,45 + 0,25 = 0,3$$

B3. Η πιθανότητα του ενδεχομένου «Ο μαθητής να συμμετέχει σε μόνο μία από τις δύο ομάδες»

$$P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,5 + 0,45 - 0,5 = 0,45$$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) - 1}{x - 1} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x - 1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)^2}{(x - 1)(x^2 + 1)} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)}{(x^2 + 1)} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Ο πίνακας προσήμων είναι

x	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
f				

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ ίσο με $f(-1) = -\frac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 1$ με $f(1) = \frac{1}{2}$.

Γ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι ευθεία με

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ όπου ο συντελεστής διεύθυνσης της στο σημείο επαφής $A(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ είναι:

$$\lambda = f'(\sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt{2}^2}{(\sqrt{2}^2 + 1)^2} = -\frac{1}{9}$$

Επίσης είναι

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Το σημείο A είναι σημείο της ευθείας άρα επαληθεύει την εξίσωση της άρα

$$\frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{1}{9}\sqrt{2} + \beta \Leftrightarrow 3\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 9\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A έχει εξίσωση

$$y = -\frac{1}{9}x + \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Γ4. Έστω $(x_0, f(x_0))$ τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 1, τότε πρέπει

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1 - x_0^2}{(x_0^2 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - x_0^2 = (x_0^2 + 1)^2 \Leftrightarrow 1 - x_0^2 = x_0^4 + 2x_0^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x_0^4 + 3x_0^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 = 0 \end{aligned}$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι η αρχή των αξόνων $(0, 0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Βαθμολογία	Συχνότητες v_i
[10-12)	5
[12-14)	10
[14-16)	v_3
[16-18)	10
[18-20)	5

Δ1. Είναι $f_1\% = 10$ άρα $f_1 = 0,1$ άρα $f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_1}{f_1} = \frac{5}{0,1} = 50$

Επίσης

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

$$\sum_{i=1}^5 v_i = v \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 + 10 + v_3 + 10 + 5 = 50 \Leftrightarrow v_3 = 20$$

Δ2.

Βαθμολογία	Κεντρικές τιμές	Συχνότητες v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[10-12)	11	5	55	-4	16	80
[12-14)	13	10	130	-2	4	40
[14-16)	15	20	300	0	0	0
[16-18)	17	10	170	2	4	40
[18-20)	19	5	95	4	16	80
Σύνολο	-	50	$\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i = 750$	-	-	$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = 240$

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i = \frac{750}{50} = 15$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{240}{50} = 4,8$$

Δ3. Το σύνολο των μαθητών που συμμετείχαν και είχαν βαθμό τουλάχιστον 12 είναι

$$v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 10 + 20 + 10 + 5 = 45$$

$$\bar{x} = \frac{1}{45} \sum_{i=2}^5 x_i v_i = \frac{130 + 300 + 170 + 95}{45} = 15,44$$

Δ4.

Βαθμολογία	Κεντρικές τιμές	Συχνότητες v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}_B$	$(x_i - \bar{x}_B)^2$	$(x_i - \bar{x}_B)^2 \cdot v_i$
[10-12)	11	15	165	-4	16	240
[12-14)	13	30	390	-2	4	120
[14-16)	15	60	900	0	0	0
[16-18)	17	30	510	2	4	120
[18-20)	19	15	285	4	16	240
Σύνολο	-	150	2250	-	-	720

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{2250}{150} = 15$$

$$s^2_B = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}_B)^2 v_i}{v} = \frac{720}{150} = 4,8$$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΚΑΙ «ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr