

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. α. Ψ

β. Για να είναι το x_0 θέση σημείου καμπής πρέπει επιπλέον να αλλάζει το πρόσημο της f'' εκατέρωθεν του x_0 .

A3. δ

A4. α. Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$h'(x) = \frac{e^x(1 + e^{2x}) - 2e^{2x} \cdot e^x}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(1 + e^{2x})^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow e^{2x}=e^0 \Leftrightarrow x=0$$

$$h'(x)>0 \Leftrightarrow \dots x<0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'(x)		+	○	-	
h(x)		↗		↘	

ΜΕΓ.

Η h είναι ↗ στο $(-\infty, 0]$, ↘ στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει στο $x_0=0$ μέγιστο με τιμή $h(0) = \frac{1}{2}$.

B2. Έστω $A_1=(-\infty, 0]$. Η h είναι συνεχής και ↗ στο A_1 οπότε

$$h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(0) \right] = (0, 1] \text{ όπου}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ – ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ
- 2017

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

Έστω $A_2 = [0, +\infty)$

Η h είναι συνεχής και  στο A_2

οπότε

$$h(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(0) \right) = (0, 1]$$

όπου

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = 0 \end{aligned}$$

Άρα $h(A) = h(A_1) \cup h(A_2) = (0, 1]$

B3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ οπότε $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ οπότε $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

B4.

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x \cdot h(x) dx &= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1 + e^{2x})'}{1 + e^{2x}} dx = \frac{1}{2} [\ln(1 + e^{2x})]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1 + e^2) - \ln(1 + e^0)) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + e^2}{2} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δ

Γ1. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο BEZ

$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Rightarrow EZ^2 = x^2 + (2 - x)^2 \Rightarrow EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}, 0 \leq x \leq 2$$

Γ2. $(EZH\Theta) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

Άρα $f(x) = 2x^2 - 4x + 4, 0 \leq x \leq 2$

Γ3. $f'(x) = 4x - 4, 0 \leq x \leq 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0	1	2
f'(x)		-	+
f(x)			

	TM	TE	TM
--	----	----	----

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x=0$ ή $x=2$ με τιμή $f(0) = 4$, και ελάχιστο για $x=1$ με τιμή $f(1)=2$.

Γ4. Για $x_0 \in [0, 2]$ ισχύει:

$$x_0 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq 1 \Leftrightarrow 4e^{x_0} \geq 4 \Leftrightarrow 4e^{x_0} + 1 \geq 5.$$

Όμως $2 \leq f(x_0) \leq 4$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Άρα δεν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ ώστε το εμβαδόν $f(x_0)$ του $EZH\Theta$ να 'ναι ίσο με $4e^{x_0} + 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. άρα $f(0)=f(3)=2$.

$$\int_0^3 |f'(x)| dx = 8 \Leftrightarrow - \int_0^2 f'(x) dx + \int_2^3 f'(x) dx = 8 \Leftrightarrow$$

$$-[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow -f(2) + f(0) + f(3) - f(2) = 8$$

$$\Leftrightarrow f(2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x f'(x) \stackrel{f' \text{ συνεχής}}{=} f'(1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{f(x) - 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x)'}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

Γιατί $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Δ2.

x	0	2	3
$f'(x)$		- 	4
$f(x)$			
	TM	TE	TM

Η f είναι  στο $[0, 2]$,  στο $[2, 3]$ και παρουσιάζει Τ.Μ. για $x=0$ και $x=3$, Τ.Ε. για $x=2$.

x	0	1	3
$f'(x)$			
$f(x)$			
		Σ.Κ	

Η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$, κυρτή στο $[1, 3]$ και παρουσιάζει Σ.Κ. για $x=1$.

Δ3.

- Η f συνεχής στο $[2, 3]$ ως παραγωγίσιμη
- $f(2) \cdot f(3) < 0$. Από θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχισ.

$x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι  στο $[2, 3]$ θα 'ναι μοναδικό
 Αν $x \in (2, x_0)$, $f(x) < 0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

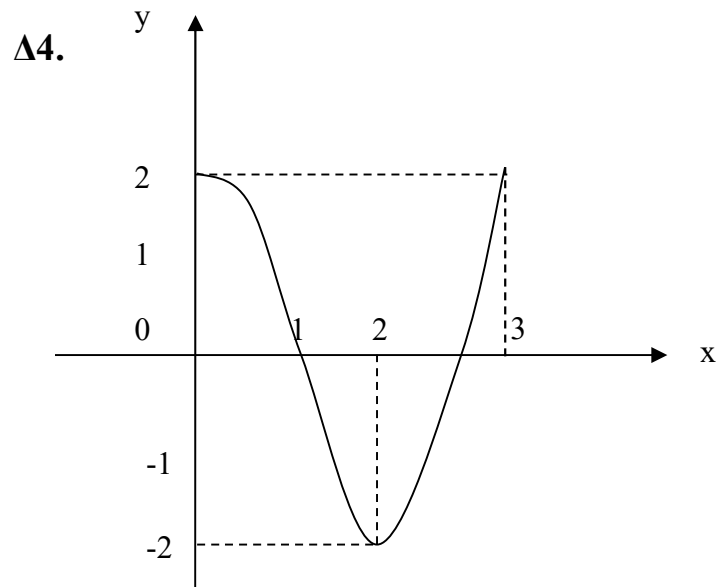
Αν $x \in (x_0, 3)$, $f(x) > 0$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ – ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ
- 2017

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)}$$

οπότε δεν ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.



ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr