ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. **α.** Ψ

β. Για να είναι το x_0 θέση σημείου καμπής πρέπει επιπλέον να αλλάζει το πρόσημο της f΄΄ εκατέρωθεν του x_0.

Α3. δ

Α4. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{BEZ}$

$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Rightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 \Rightarrow EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}, 0 \leq x \leq 2$$

Β2. (ΕΖΗΘ)=EZ^2=$2x^2$-4x+4

Άρα f(x)=$2x^2$-4x+4, 0≤x≤2

Β3. f΄(x)=4x-4, 0≤x≤2

f΄(x)=0⇒x=1

x	0		1		2
f΄(x)		-	0	+	
f(x)		↘		↗	
	ΤΜ		ΤΕ		ΤΜ

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για x=0 ή x=2 με τιμή f(0) =4, και ελάχιστο για x=1 με τιμή f(1)=2.

Β4. Για $x_0 \in [0, 2]$ ισχύει:

$x_0 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq 1 \Leftrightarrow 4e^{x_0} \geq 4 \Leftrightarrow 4e^{x_0} + 1 \geq 5.$

Όμως $2 \leq f(x_0) \leq 4$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Άρα δεν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ ώστε το εμβαδόν $f(x_0)$ του ΕΖΗΘ να 'ναι ίσο με $4e^{x_0} + 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο [0, 3] και δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. άρα f(0)=f(3)=2.

$$\int_0^3 |f'(x)|dx = 8 \Leftrightarrow -\int_0^2 f'(x)dx + \int_2^3 f'(x)dx = 8 \Leftrightarrow$$

$$-[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow -f(2) + f(0) + f(3) - f(2) = 8$$

$$\Leftrightarrow f(2) = -2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{lnx} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{(lnx)'} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} x f'(x) \overset{f' \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=} f'(1) = -3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{f(x)-2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{f(x)-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(x)'}{f'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

Γιατί $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Γ2.

x	0		2		3
f΄(x)		-		4	
f(x)		↘		↗	
	TM		TE		TM

Η f είναι ↘ στο [0, 2], ↗ στο [2, 3] και παρουσιάζει Τ.Μ. για x=0 και x=3, Τ.Ε. για x=2.

x	0		1		3
f΄(x)		↘		↗	
f(x)		⌒		⌣	
			Σ.Κ		

Η f είναι κοίλη στο [0, 1], κυρτή στο [1, 3] και παρουσιάζει Σ.Κ. για x=1.

Γ3.

- Η f συνεχής στο [2, 3] ως παραγωγίσιμη
- f(2) · f(3) <0. Από θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχ.

$x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή η f είναι ↗ στο [2, 3] θα ‘ναι μοναδικό

Αν $x \in (2, x_0)$, f(x)<0 τότε

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)} = -\infty$$

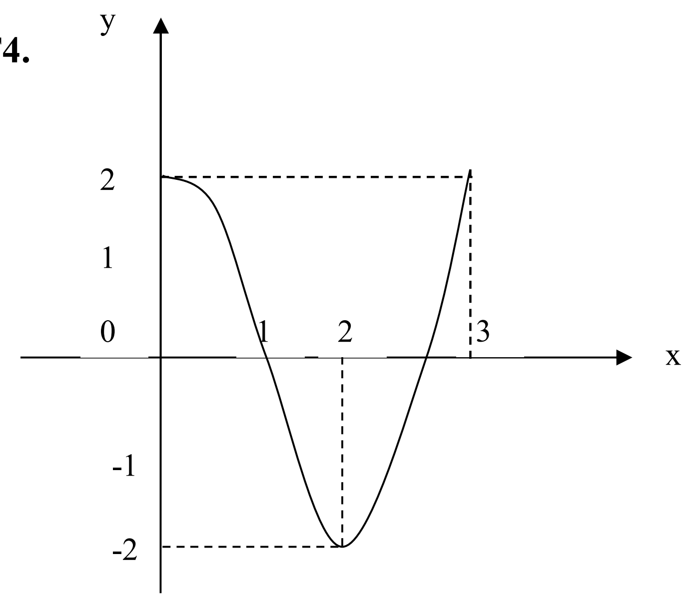
Αν $x \in (x_0, 3)$, f(x)>0 οπότε

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}$$

οπότε δεν ορίζεται το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$.

Γ4.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο (0, 2] ως πολυωνυμική

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 - 3x^2 + 2) = 2 = f(0).$

Άρα η f είναι συνεχής στο [0, 2].

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) ως πολυωνυμική.

Άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0, 2].

Δ2.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha\right) = \alpha - 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 - 3x^2 + 2) = 2 = f(0)$

Τότε α-1=2⇔α=3.

Δ3. Για x∈$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$: $f'(x) = \left(-\frac{\eta\mu x}{x} + 3\right)' = \frac{\eta\mu x - x\cdot\sigma\upsilon\nu}{x^2}$

Θεωρούμε: g(x)=ημx-x·συνx, x∈$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

g΄(x)=(ημx-x·συνx)΄=xημx>0 στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και επειδή η g συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ θα ΄ναι $\nearrow$ σ' αυτό.

$$-\frac{\pi}{2} \le x < 0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

Για x∈(0, +∞): f΄(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0⇔x=2

Αν f΄(x)>0⇔x>2

Αν f΄(x)<0⇔x<2

Οπότε:

x	-π/2		0		2		+∞
f΄(x)		-		-	0	+	
f(x)		$\searrow$				$\nearrow$	

Η f είναι $\searrow$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\right]$, $\nearrow$ στο [2, +∞).

Δ4.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \quad (x)dx + \int_{0}^{2}(x^3 - 3x^2 + 2)dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_0^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} + 3 \geq f(x) \geq 2$$

Τότε:

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-\frac{2}{\pi} + 3\right)dx \Leftrightarrow \pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx \quad \frac{3\pi}{2} - 1$$

Δ5.

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{\pi}{2}x > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}x < 0$$

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 > -x > -1 \Leftrightarrow e^0 > e^{-x} > e^{-1} \Leftrightarrow$$

$$1 > e^{-x} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}e^{-x} < -\frac{\pi}{2e}$$

Άρα

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}e^{-x} < 0$$

Συνεπώς

$$-\frac{\pi}{2}x, -\frac{\pi}{2}e^{-x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

H f είναι $\searrow$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ άρα και ΄΄1-1΄΄.

Τότε:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{2}e^{-x} \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} - x = 0$$

Θεωρούμε h(x)=e^{-x}-x, x∈[0, 1]

h΄(x)= -(e^{-x}+1)<0 άρα η h είναι $\searrow$ στο [0, 1]. Η h είναι συνεχής στο [0, 1] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

h(0)=1>0, h(1)=$\frac{1}{e} - 1 < 0$. Από θ. Bolzano η h(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1) και επειδή η h είναι $\searrow$ η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr