ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|=|\bar{z}|=|-z|$.

Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

Μονάδες 2

γ. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $w=3z-i\bar{z}+4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(w)=3\alpha-\beta+4$
$\mathrm{Im}(w)=3\beta-\alpha$.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^o

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β).

Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Θεωρία (σχολικό βιβλίο § 2.1 σελίδα 217).
Β. Θεωρία (σχολικό βιβλίο § 2.5 σελίδα 247).
Γ. α. Η πρόταση είναι σωστή.
β. Η πρόταση είναι σωστή.
γ. Η πρόταση είναι σωστή.
δ. Η πρόταση είναι λανθασμένη.
ε. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

ΘΕΜΑ 2^o

α. $w = 3(a+\beta i) - i(a - \beta i)+4 = (3a - \beta+4) + (3\beta - \alpha)i$
Άρα, $Re(w) = 3\alpha - \beta+4$ και $Im(w) = 3\beta - \alpha$

β. Επειδή η εικόνα του w ανήκει στην ευθεία y= x – 12, ισχύει: $3\beta - \alpha = 3^{\alpha} - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2$

Άρα, οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y= x – 2.

γ. Η εικόνα του z με το ελάχιστο μέτρο είναι το ίχνος Η της κάθετης (ζ) που άγεται από το Ο προς την ε: y = x – z.

Είναι: λ_{ζ}: y = -1 (αφού $\zeta \perp \varepsilon$). Άρα ζ: y = - x

Έχουμε: $\begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Άρα, z_0 = 1-i είναι ο ζητούμενος μιγαδικός

ΘΕΜΑ 3^{o}

α. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ και $f''(x) = 20x^3 + 6x$.

- Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ τότε f γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(10x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $10x^2 + 3 = 0$ αδύνατη.

x	- ∞	0	+∞
f''	- 0		+
f			

οπότε f κοίλη στο (- ∞,0] και f κυρτή στο [0,+ ∞).

- Αφού f γνησίως αύξουσα στο $\Re$ τότε είναι «1-1», άρα, αντιστρέφεται.

β. Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in \Re$

$g'(x) = e^x - 1$, $x \in \Re$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'	$-$		0	$+$	
g	$\searrow$		min	$\nearrow$	

Για $x=0$ η g παρουσιάζει ελάχιστο, το $g(0)=0$.

Άρα, για κάθε $x \in \Re$ έχουμε:

$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$

Αφού f γνησίως αύξουσα στο $\Re$ τότε:

$f(e^x) \geq f(x+1)$, για κάθε $x \in \Re$.

γ. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $0(0,0)$ είναι:

ε: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y=x$ δηλαδή ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.

δ. Αφού $f^{-1}(y) = x$, για $x \in [0,3]$ τότε $f^{-1}(y) \geq 0$

$$E(\Omega) = \int_0^3 f^{-1}(x)dx = \int_0^3 f^{-1}(y)dy \qquad (1)$$

Είναι $y = f(x)$ άρα $dy = f'(x)dx$ και $f^{-1}(y) = x$.

Για $y=0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$

Για $y=3$: $f(x) = 3 \Leftrightarrow x=1$

Η (1) γίνεται:

$$\int_0^1 f^{-1}\left(f(x)\right) \cdot f'(x)dx = \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = \int_0^1 x(5x^4 + 3x^2 + 1)dx = \int_0^1 (5x^5 + 3x^3 + x)dx =$$

$$\frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω $\gamma<\delta$. Η f συνεχής στο $[\gamma,\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$ και $f(\gamma) \cdot f(\delta)<0$ τότε:

από $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ρίζα της f στο (α,β) δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

β. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (a, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια ώστε:

$f'(x_1)=0$ και $f'(x_2) = 0$. Επειδή η f'' είναι συνεχής στο (α,β) τότε αν η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α,β), η f' θα είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Άρα, η εξίσωση $f'(x)=0$ θα έχει το πολύ μια ρίζα στο (α,β), άτοπο.

Άρα υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

γ. Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ με $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) <0$.

Άρα, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

- Επειδή η f'' δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\xi_1, \xi_2]$ τότε εκατέρωθεν του ξ η f'' αλλάζει πρόσημο, (με την προϋπόθεση ότι η f'' δεν μηδενίζεται για κάθε x κοντά στο ξ).
- Στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ ορίζεται εφαπτομένη της C_f (αφού f παραγωγίσιμη).

Άρα, το σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής της f.
Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της C_f.

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» Φλωρόπουλου.

Γιοράν Π. – Κούσης Π. – Σιφναίος Δ. – Φλωρόπουλος Α.