Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ Κ Α Ι Τ Ε Χ Ν Ο Λ Ο Γ Ι Κ Η Σ Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και χ_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(\chi_0)=0$

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο X_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.

Μονάδες 2

β. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο X_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο X_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_o) = f'(\chi_0)\, g'(x_0)$

Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in \left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(a)=\int_a^0 g(x)dx,\ a \in R$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{a \to -\infty} I(a)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^o

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R→R τέτοια ώστε f(1)=1. Αν για κάθε $x \in \Re$, ισχύει

$$g(x)=\int_1^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0,$$

όπου $z=\alpha+\beta i \in C$, με $\alpha, \beta \in \Re^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g'.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $R\in(z^2) = -1/2$.

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον f(2)=a>0, f(3)=β και α>β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελ. 260,261

Β. Σχολικό βιβλίο σελ. 213

Γ. α→Σ β→Σ γ→Λ δ→Λ ε→Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f έχει πεδίο ορισμού Α=(0,+∞) και είναι παραγωγίσιμη στο Α με: f'(x)=x(2lnx+1)

$$f'(x) \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		+∞
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	min	↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$

Στο $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$

β. f''(x)=2lnx+3

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

Το πρόσημο της f'', η κυρτότητα και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{1}{e\sqrt{e}}$		+∞
f''(x)		-	0	+	
f(x)			σ.κ.		

Η f είναι κοίλη στο $\left(0,\frac{1}{e\sqrt{e}}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{1}{e\sqrt{e}},+\infty\right)$

Το σημείο καμπής είναι το $\Sigma\left(\frac{1}{e\sqrt{e}},-\frac{3}{2e^3}\right)$

γ. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\cdot \ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^2}{2}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot \ln x\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Αν $x\in A_1=\left(0,\dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right]$ τοτε $f(A_1)=\left[-\dfrac{1}{2e},0\right)$

Αν $x\in A_2=\left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}},+\infty\right]$ τοτε $f(A_2)=\left[-\dfrac{1}{2e},+\infty\right)$

Αρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left[-\dfrac{1}{2e},+\infty\right)$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f ως παραγωγίσιμη στο R είναι και συνεχής στο R. Η g είναι συνεχής στο [0,3/2] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Η g παραγωγίσιμη στο (0,3/2) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)$

$g(0)=f(0)=0$

$g\left(\dfrac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}\cdot f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$

Άρα g(0)=g(3/2). Από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,3/2)$ τέτοιο ώστε:

$g'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi}\,(f(\xi)+f'(\xi))=0\Leftrightarrow f'(\xi)=-f(\xi)$.

β. Αν α=0 τότε $I(a)=\int_a^0 g(x)dx=0$

Αν α<0 τότε $I(a)=\int_a^0 e^x(2x^2-3x)dx=\int_a^0 \left(e^x\right)'\left(2x^2-3x\right)dx$

$=\left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_a^0 e^x(4x-3)dx=-e^a\left(2a^2-3a\right)-\left[e^x(4x-3)\right]_a^0+\int_a^0 4e^x dx=$

$=-e^a\left(2a^2-3a\right)+3+e^a(4a-3)+4\left[e^x\right]_a^0=$

$-e^a\left(2a^2-3a\right)+3+e^a(4a-3)+4(1-e^a)==e^a(-2a^2+7a-7)+7.$

Αν $I(a)=-\int_0^a e^x(2x^2-3x)dx=$

$=-\left[e^a(2a^2-7a+7)-7\right]=e^a(-2a^2+7a-7)+7$

γ. $\lim\limits_{a\to-\infty} I(a)=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[e^a(-2a^2+7a-7)+7\right]$

$$\lim_{a\to-\infty}\left[e^{a}(-2a^2+7a-7)\right]=\lim_{a\to-\infty}\frac{-2a^2+7a-7}{e^{-a}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{a\to-\infty}\frac{(-2a^2+7a-7)'}{\left(e^{-a}\right)'}$$

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{-4a+7}{-e^{-a}}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{a\to-\infty}\frac{(-4a+7)'}{(-e^{-a})'}=\lim_{a\to-\infty}\frac{-4}{e^{-a}}=0.\ \text{Άρα}\ \lim_{a\to-\infty}I(a)=0+7=7$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $g(x)=|z|\int_1^{x^3} f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1),\ x\in R$

Η f είναι συνεχής στο R οπότε $\int_1^{x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R. Άρα $\int_1^{x^3} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=|z|\,f\left(x^3\right)3x^2-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$

β. Επειδή $g(1)=0$ είναι $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in\Re$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$.

Σύμφωνα με το Θ. Fermat $g'(1)=0\Leftrightarrow 3|z|\,f(1)-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0\Leftrightarrow |z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$

γ. $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|\Leftrightarrow |z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)\Leftrightarrow$

$z\bar{z}=z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}}\Leftrightarrow$

δ. $z^2=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta$
$Re(z^2)=a^2-\beta^2=-1/2$. Άρα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-1/2<0$ και αφού $\alpha-\beta>0$ τότε

$$\left.\begin{matrix}f(2)=\alpha>0\\ f(3)=\beta<0\end{matrix}\right\}f(2)\times f(3)<0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.