ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \boldsymbol{\eta}.$$

Μονάδες 9

Α.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Μονάδες 2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Μονάδες 2

δ. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x) - f(a)$ για κάθε x $\in$ Δ.

Μονάδες 2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x $\in$ Δ ή είναι αρνητική για κάθε x $\in$ Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|= 3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$.

Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός .

Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^o

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2 f'(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε $x \in$ IR και $f(0) = 0$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}$.

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt$ και $g(x) = \dfrac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in IR$.

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt = \dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0\,,\,1)$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελ.: 194 (Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών)

Α.2. Σχολικό βιβλίο σελ.:280 Ορισμός: Η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της f στο +∞, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}$ [F(x)-(λx+β)]=0.

Β. **α)** Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος
στ) Σωστό

ΘΕΜΑ 2^o

α) $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \dfrac{9}{z_1}$

β) Έστω $\omega = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

$$\bar{\omega} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = \omega .$$

Άρα: ω-$\bar{\omega}$=0 ⇔2i Im(ω)=0 ⇔ Im(ω)=0 οπότε: $\omega \in \Re$

γ) $|z_1 + z_2 + z_3| = \left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| =$

$$= \left|\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3}\right| = 9 \cdot \left|\frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 z_2 z_3}\right| =$$

$$= 9 \cdot \frac{|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = 9 \frac{|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3|}{3 \cdot 3 \cdot 3} =$$

$$=\frac{1}{3}|z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3|$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}$, λ>0

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f σε ένα σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ είναι :

$$\varepsilon:\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(x-x_0).$$

Η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) αν και μόνο αν

$$0-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$$

Άρα το σημείο επαφής είναι : $M(\frac{1}{\lambda},e)$ και η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=\lambda ex$

γ. $f''(x)=\left(\lambda e^{\lambda x}\right)'=\lambda^2e^{\lambda x}>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η f είναι κυρτή στο R και η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη ε σε κάθε σημείο της

(με εξαίρεση το σημείο επαφής).

Όποτε : $f(x)\geq\lambda ex$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{1}{\lambda}\right]$

$$E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(f(x)-\lambda ex\right)dx=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}e^{\lambda x}dx-\lambda e\int_0^{\frac{1}{\lambda}}xdx=\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}-\lambda e\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=\frac{e-2}{2\lambda}$$

δ. $$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda(e-2)}{2(2+\eta\mu\lambda)}=\frac{e-2}{2}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}}$$

Για κάθε λ>0 έχουμε : $\left|\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right|=\frac{|\eta\mu\lambda|}{|\lambda|}\leq\frac{1}{\lambda}$ οπότε : $-\frac{1}{\lambda}\leq\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\leq\frac{1}{\lambda}$

Επειδή $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0,\ \lim_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)=0$ από κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε : $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}=0$.

Έχουμε $\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right)=0+0=0$ και επειδή $\frac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}>0$ για κάθε λ>0 οπότε $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}}=+\infty$ και αφού $\frac{e-2}{2}>0$ τότε :

$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\mathrm{E}(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για κάθε $x\in R$ έχουμε

$$2f'(x)=e^{x-f(x)}\Leftrightarrow 2f'(x)=\frac{e^x}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)}=\frac{1}{2}e^x\Leftrightarrow$$

$\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{2}e^x\right)'$ οπότε $e^{f(x)}=\frac{1}{2}e^x+c, c\in R$ για x=0 :

$$e^0=\frac{1}{2}e^0+c\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$$

Άρα $e^{f(x)}=\frac{e^x+1}{2}$ οπότε $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right), x\in R$

β. Θέτουμε : x-t=u, dt=-du

για t=0, $u_1=x$

για t=x, $u_2=0$

Άρα $\int_0^x f(x-t)dt=-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(u)du$

Η f είναι συνεχής στο R οπότε η $\Phi(x)=\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσημη στο R με $\Phi'(x)=f(x)$ οπότε και συνεχής.

Επειδή η Φ είναι συνεχής στο $x_0=0$ τότε

$$\lim_{x\to 0}\Phi(x)=\Phi(0)=\int_0^0 f(u)du=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\eta\mu x)=\eta\mu 0=0$$

Έχουμε : $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\Phi(x)}{\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{\Phi'(x)}{(\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}=0$

γ. h(x)= $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt=\int_{-x}^{0} t^{2005} f(t)dt+\int_0^x t^{2005} f(t)dt=$

$$=-\int_0^{-x} t^{2005} f(t)dt+\int_0^x t^{2005} f(t)dt,\ x\in R$$

$$h'(x)=-(-x)^{2005}\cdot f(-x)\cdot(-x)'+x^{2005}\cdot f(x)=$$

$$-x^{2005}\cdot f(-x)+x^{2005}\cdot f(x)==x^{2005}\left(f(x)-f(-x)\right)=$$

$$x^{2005}\cdot\left[\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\right]=x^{2005}\cdot\ln\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}=$$

$=x^{2005}\cdot\ln e^x=x^{2006},\ x\in\Re$

$g'(x)=\left(\dfrac{x^{2007}}{2007}\right)'=X^{2006},\ x\in\Re$

Άρα: h'(x)=g'(x) για κάθε $x\in\Re$

οπότε: h(x)=g(x)+C, $C\in\Re$

για x=0: h(0)=g(0)+C $\Leftrightarrow$C=0

Άρα: h(x)=g(x) για κάθε $x\in\Re$

δ. $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot F(t)dt=\dfrac{1}{2008}\Leftrightarrow\dfrac{x^{2007}}{2007}=\dfrac{1}{2008}\Leftrightarrow 2008\cdot x^{2007}-2007=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $H(x)=2008\cdot x^{2007}-2007$, $x\in[0,1]$

- H συνεχής στο [0,1]
- H(0)=-2007
- H(1)=1 Άρα: H(0)·H(1)<0. Από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,1).

Επειδή $H'(x)=2008\cdot 2007\cdot x^{2006}>0$ στο $(0,1)$ η H είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.
Άρα η εξίσωση $H(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0,1)$.

ΓΙΔΑΡΑΚΟΣ Θ. – ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ Ι. – ΚΟΝΤΑΞΗΣ Ι.
ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΠΑΡΙΑΝΟΣ Σ. – ΤΖΩΡΤΙΝΗΣ Ι.- ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Α. ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ