ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 10

Α.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε x ∈ IR.

Μονάδες 2

ε. Ισχύει η σχέση

$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f΄,g΄

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2+(x-2)^2$ με x≥2.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

γ. **i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x.

Μονάδες 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο, σελ.:253

Α.2. Σχολικό βιβλίο, σελ.:273

Β. **α)** Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

Θέμα 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, +\infty)$ με $f'(x)=2(x-2)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ οπότε η f είναι 1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1 στο $A=[2,+\infty)$ τότε ορίζεται η $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$.

Για να βρούμε τον τύπο της f^{-1} θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x.

Έχουμε $f(x)=y \Leftrightarrow 2+(x-2)^2=y \Leftrightarrow (x-2)^2=y-2,\quad y\geq 2$

$$\overset{x\geq 2}{\Leftrightarrow} x-2=\sqrt{y-2},\ y\geq 2$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{y-2}+2,\ y\geq 2 \text{ δηλαδή}$$

$$f^{-1}(y)=\sqrt{y-2}+2,\ y\geq 2 \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+2,\ x\geq 2$$

γ) i. Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και της ευθείας $y=x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=x \Leftrightarrow 2+(x-2)^2=x \Leftrightarrow (x-2)^2=(x-2) \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$.
Άρα τα κοινά σημεία είναι $K(2,2)$, $\Lambda(3,3)$τα οποία είναι και τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y=x$.

ii. Επειδή οι C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ τότε το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι διπλάσιο από το εμβαδό E_1 του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία $y=x$.
Έχουμε $f(x)-x = 2+(x-2)^2-x = x^2-5x+6 \leq 0$ για κάθε $χ\in[2,3]$

$$E_1=-\int_2^3[f(x)-x]dx=-\int_2^3(x^2-5x+6)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+6x\right]_2^3=\ldots=\frac{1}{6}\text{ τ.μ.}$$

Άρα $E=2E_1=\frac{1}{3}$ τ.μ.

Θέμα 3ο

α. i. Είναι $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$

• $z_1=-z_2-z_3$

Έχουμε $|z_1-z_2|=|z_3-z_1| \Leftrightarrow |-2z_2-z_3|=|2z_3+z_2| \Leftrightarrow |2z_2+z_3|^2=|2z_3+z_2|^2 \Leftrightarrow$ $(2z_2+z_3)(2\overline{z}_2+\overline{z}_3)=(2z_3+z_2)(2\overline{z}_3+\overline{z}_2) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow |z_2|^2=|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_2|=|z_3|$ ισχύει.

Όμοια προκύπτει $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$ άρα $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$

ii. Ισχύει $|z_1-z_2|\le|z_1|+|-z_2|=|z_1|+|z_2|=2$ άρα $|z_1-z_2|^2\le4$.

Έχουμε $|z_1-z_2|^2\le4 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)\le4 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z}_2+\overline{z}_1\cdot z_2\ge-2 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z}_2)\ge-2 \Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z}_2)\ge-1$.

β. Έστω M_1,M_2,M_3 οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 αντίστοιχα.

• αφού $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων τους είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

• αφού $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$ τότε $(M_1M_2)=(M_1M_3)=(M_2M_3)$ δηλαδή το τρίγωνο $M_1M_2M_3$ είναι ισόπλευρο.

Θέμα 4ο

α. Για να ορίζεται η f πρέπει $x>0$ και $x\neq1$ άρα $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με $f'(x)=\dfrac{-x^2-1}{x(x-1)^2}<0$ για κάθε $x\in A$.

Η μονοτονία της f φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	+∞
f′(x)	−	‖	−
f(x)	↘	‖	↘

• $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=+\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=-\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,1)$ οπότε $f(A_1)=\left(\lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$
- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=(1,+\infty)$ οπότε $f(A_2)=\left(\lim_{x\to +\infty} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\mathbb{R}$.

β) • Αφού το 0 ανήκει στο $f(A_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο A_1.

• Αφού το 0 ανήκει στο $f(A_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο A_2.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της A.

γ) • Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x)=\frac{1}{x}$. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $A(\alpha, \ln\alpha)$ είναι:

$$\varepsilon_1:\quad y-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1}{\alpha}x+\ln\alpha-1$$

• Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^x$. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_h στο $B(\beta,e^{\beta})$ είναι:

$$\varepsilon_2:\quad y-e^{\beta}=e^{\beta}(x-\beta) \Leftrightarrow$$

$$y=e^{\beta}x+e^{\beta}-\beta e^{\beta}$$

Αφού ε_1, ε_2 ταυτίζονται τότε:

$$\begin{cases} e^{\beta}=\frac{1}{\alpha} \\ \text{και} \\ e^{\beta}-\beta e^{\beta}=\ln\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\ln\alpha \\ \text{και} \\ \frac{1}{\alpha}+\frac{\ln\alpha}{\alpha}=\ln\alpha-1 \end{cases}$$

Άρα $1+\ln\alpha=\alpha\cdot\ln\alpha-\alpha \Leftrightarrow \alpha+1-(\alpha-1)\ln\alpha=0$ (I)

Για κάθε $x\in A$ έχουμε: $f(x)=0\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}-\ln x=0 \Leftrightarrow$

$x+1-(x-1)\ln x=0$ (II)

Από (I) το α είναι ρίζα της εξίσωσης (II) ή ισοδύναμα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) Αφού η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της και ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 τότε υπάρχουν ακριβώς δυο σημεία με τετμημένες στο (0,1) και στο (1, +∞) στα οποία οι εφαπτομένες των C_g, C_h ταυτίζονται

φροντιστήρια
"ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ"
Α. Φλωρόπουλου