ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου k,ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \le \nu$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i, που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i = 1,2,\ldots,k$;

Μονάδες 3

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i,
$i = 1,2,\ldots,k$;

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι:

i) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,\ldots,k$

ii) $f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$.

Μονάδες 4

Β.1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Μονάδες 8

Β.2. **α.** Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου Ω.

Μονάδες 5

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ **ii)** $P(\varnothing)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f.

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:
8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 6

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3 , \quad x \in R.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. α. Είναι ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων (σελίδα 65 σχολικό βιβλίο).

β. Είναι το πηλίκο της συχνότητας v_i με το μέγεθος ν του δείγματος.

Δηλαδή $f_i = \dfrac{v_i}{v}, i = 1,2,\dots k$.

(Σελίδα 65, σχολικό βιβλίο).

γ. i. $0 \le f_i \le 1$ για i = 1,2,…,k αφού $0 \le v_i \le v$

ii. $f_1 + f_2 + \dots + f_k =$

$$\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_k}{v} =$$

$$= \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1$$

(Σελίδα 65, σχολικό βιβλίο).

Β.1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 150.

Β.2. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 148

β. i. $P(\Omega) = 1$

ii. $P(\varnothing) = 0$

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. Για να ορίζεται η f πρέπει : $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Άρα $A = \Re - \{-1\}$

β. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

γ. $f\,'(x)z = \dfrac{(2x)' \cdot (x+1) - 2x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{2\,(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2},\ x \neq -1$

δ. Τα σημεία (x, f(x)) της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στην ευθεία y = 2x + 5 είναι εκείνα για τα οποία ισχύει :

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \text{ ή } x+1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2$$

Οπότε f(0) = 0 και f(-2) = 4

Τα σημεία επαφής είναι το 0 (0,0) και Α (-2,4).

Έστω ε : y = λx + β η εξίσωση της εφαπτομένης.

Αφού είναι παράλληλη με την ευθεία δ: y = 2x + 5 , είναι λ = 2

Άρα, ε : y = 2x + β

- Το σημείο 0(0,0) επαληθεύει την ε οπότε : $0 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$

  Άρα, ε_1 : y = 2x

- Το σημείο Α(-2 ,4) επαληθεύει την ε οπότε: $4 = 2\cdot(-2)+\beta \Leftrightarrow \beta = 8$

Άρα, ε_2: y = 2x + 8.

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Οι τιμές είναι : 8,9,10,13,13,14,14,15,16,18

α. $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{1}{10}(8+9+...+18) = \frac{130}{10} = 13$

$\delta = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$

Υπάρχουν δύο επικρατούσες τιμές : $M_o = 13$, $M_0 = 14$

β. R = 18 – 8 = 10

$S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2 \quad = \frac{1}{10}\left[(8-13)^2 + (9-13)^2 + ... + (18-13)^2\right] = \frac{1}{10}\cdot 90 = 9$

Άρα S = 3

$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{3}{13}$

δηλαδή CV $\approx$ 23,08 %.

γ. Αν x_1, x_2,…, x_{10} οι αρχικές τιμές και y_1, y_2,…,y_{10} οι τιμές που προκύπτουν μετά την έκπτωση των αντίστοιχων τιμών κατά 10%. Τότε η νέα μέση τιμή $\bar{y}$ θα μειωθεί κατά 10%, δηλαδή : $\bar{y} = \bar{x} - \frac{10}{100}\bar{x} = 0{,}9\cdot\bar{x}$.

Η νέα τυπική απόκλιση είναι $S_Y = |0{,}9|\cdot S_x = 0{,}9\,S_x$

$CV_y = \frac{S_Y}{\bar{y}} = \frac{0{,}9\cdot S_x}{0{,}9\cdot\bar{x}} = \frac{S_x}{\bar{x}} = CV_x$

Άρα, ο συντελεστής μεταβολής δεν μεταβάλλεται.

ΘΕΜΑ 4^{ο}

α. Έχουμε : $P(A)+P(B) \neq 2P(A\cap B)$ ή $P(A)+P(B) - P(A\cap B) \neq P(A\cap B)$ ή $P(A\cup B) \neq P(A\cap B)$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με :

$f\,'(x) = 3(x - P(AB))^2\cdot(x - P(AB))' - 3(x - P(AB)^2 . (x - P(AB))' =$

$= 3(x - P(A\cup B))^2 - 3(x - P(A\cap B))^2 \quad = ... = 3(2x - P(A) - P(B))\cdot(P(A\cap B) - P(A\cup B))$

Έχουμε : $A\cap B \subseteq A\cup B$

οπότε : $P(A\cap B) \leq P(A\cup B)$, δηλαδή : $P(A\cap B) - P(A\cup B) < 0$

αφού $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$

Είναι $f\,'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3(2x - P(A) - P(B))\,(P(A\cap B) - P(A\cup B)) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - P(A) - P(B) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{P(A)+P(B)}{2}$

x	$-\infty$		$P(A) + P(B)/ 2$		$+\infty$
f΄		+	0	-	
f		↗	max	↘	

Άρα, για $x = \frac{P(A)+P(B)}{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο.

γ. Αφού $A \cap B = \varnothing$ τότε
$P(A \cap B) = 0$ και $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$f(P(A)) = (P(A) - P(A) - P(B))^3 - (P(A))^3 = -[P(B)]^3 - [P(A)]^3$
$f(P(B)) = (P(B) - P(A) - P(B))^3 - (P(B))^3 = -[P(A)]^3 - [P(B)]^3$

Άρα, $f(P(A)) = f(P(B))$.