

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι ίση με 0.

Μονάδες 8

B. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός.

β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

γ. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .

Μονάδες 6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη I** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη II** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη I		Στήλη II
α	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1	$A \cap B$
β	πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2	$A - B$
γ	πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3	$(A \cup B)'$
		4	$A \cup B$

Στη Στήλη II περισεύει μία σχέση

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3°

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i σε χιλ. μον.	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότ. N_i σε χιλ.μον	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$
[5,15)		60			
[15,25)					68
[25,35)				180	
[35,45)					
Σύνολο		200			

A. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

Β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(x_i, f_i\%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} .

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$.

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 9

Β. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

- i. $P(A \cap B)$
- ii. $P(A - B)$
- iii. $P[(A \cap B)']$
- iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$.

Μονάδες 16

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΘΕΜΑ 1°

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28.

B. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16.

Γ. α. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

β. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

γ. Η πρόταση είναι σωστή.

Δ. $\alpha \rightarrow 4$ $\beta \rightarrow 2$ $\gamma \rightarrow 1$

ΘΕΜΑ 2°

A. Για να ορίζεται η f πρέπει: $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - \sqrt{3} \neq 0$ δηλαδή $x \geq 0$ και $x \neq 3$. Άρα $A = [0,3) \cup (3, +\infty)$.

$$B. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{3}) = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

ΘΕΜΑ 3°Α.

Κλάσεις σε χιλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i σε χιλ. μον.	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότ. N_i σε χιλ. μον.	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i\%$
[5,15)	10	60	30	60	30
[15,25)	20	76	38	136	68
[25,35)	30	44	22	180	90
[35,45)	40	20	10	200	100
Σύνολο		200	100		

$$x_1 = \frac{5+15}{2} = 10, \text{ ομοίως } x_2 = 20, x_3 = 30, x_4 = 40.$$

$$v_1 = N_1 = 60$$

$$f_1\% = \frac{v_1}{v} 100 = \frac{60}{200} 100 = 30$$

$$F_1\% = f_1\% = 30$$

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 68 - 30 = 38$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_2 = v \cdot f_2 = 200 \cdot 0,38 = 76$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = 60 + 76 = 136$$

$$v_3 = N_3 - N_2 = 180 - 136 = 44$$

$$v_4 = 200 - (60 + 76 + 44) = 20$$

$$f_3\% = \frac{44}{200} 100 = 22$$

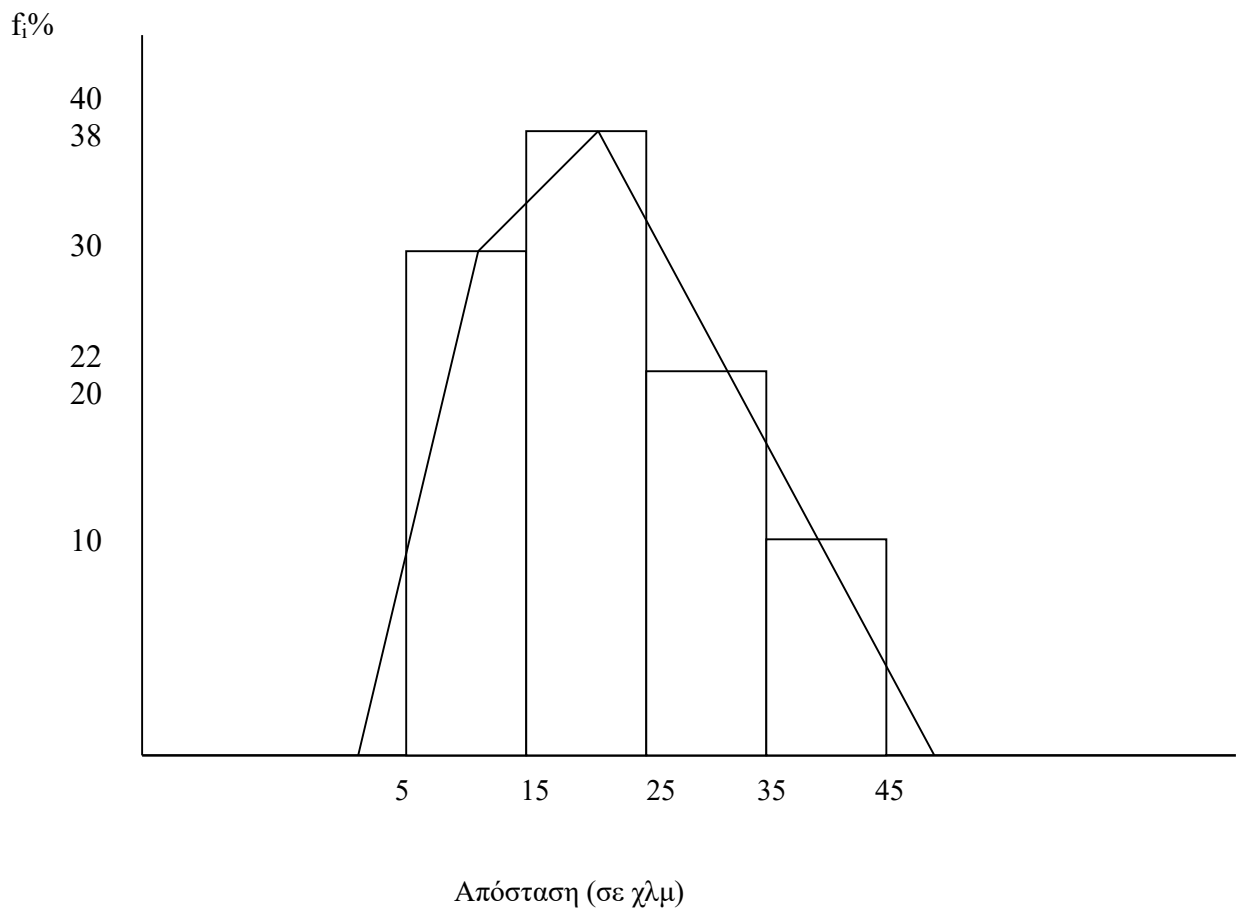
$$f_4\% = \frac{20}{200} 100 = 10$$

$$N_4 = 200$$

$$F_3\% = F_2\% + f_3\% = 68 + 22 = 90$$

$$F_4\% = 100.$$

B.



Γ. $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i x_i = \frac{1}{200} (10 \cdot 60 + 20 \cdot 76 + 30 \cdot 44 + 40 \cdot 20) = \frac{4240}{200} = 21,2$
χιλιόμετρα.

Δ. $x \geq 25$: $44 + 20 = 64$ χιλ. αυτοκίνητα.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Η f ορίζεται στο \mathbb{R} και είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2}$$

Το πρόσημο της f' και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$1/3$	$1/2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	°	-	°	+
$f(x)$	↗ T.M		↘ T.E		↗

Για $x = \frac{1}{3}$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και

για $x = \frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

Άρα $P(A) = 1/2$ και $P(B) = 1/3$.

B. i. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

ii. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

iii. $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

iv. Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$