**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ**
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΣΑΒΒΑΤΟ 28 ΜΑΪΟΥ 2005 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

## ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι για δυο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**Μονάδες 10**

Β. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

**Μονάδες 3**

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

**Μονάδες 4**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

**Μονάδες 2**

β. Ισχύει $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

**Μονάδες 2**

γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

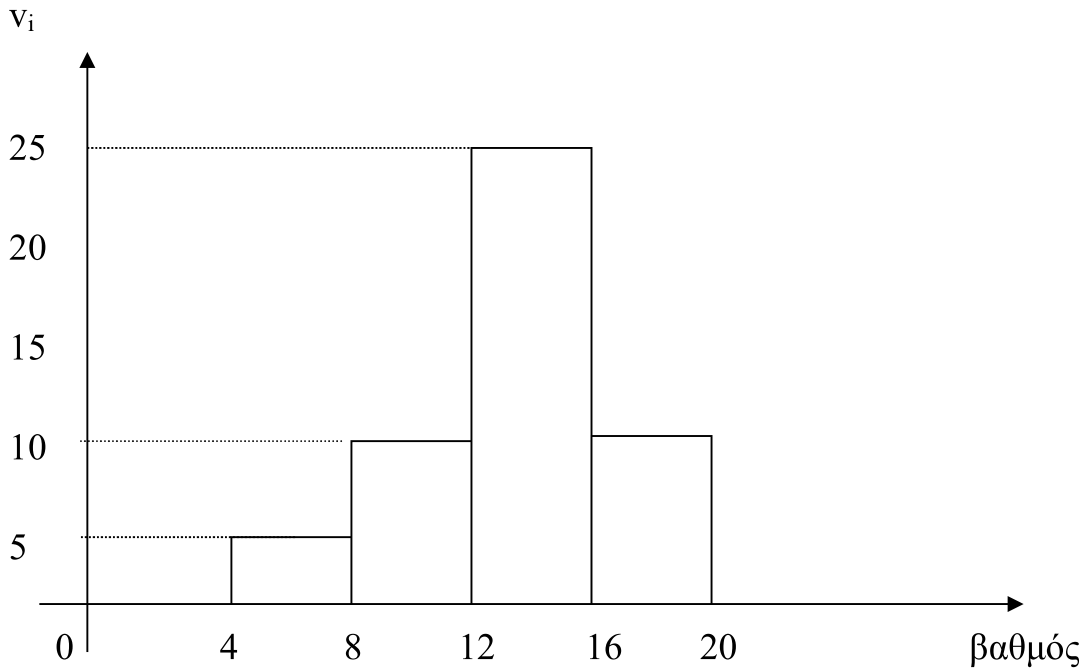
**Μονάδες 2**

δ. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων $\nu_i$ :




α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Κλάσεις βαθ/γιας [ ) | Κέντρο κλάσης $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ | Αθροιστική Συχνότητα $N_i$ | Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [4, 8) | | | | | |
| [8, 12) | | | | | |
| [12, 16) | | | | | |
| [16, 20) | | | | | |
| Σύνολο | | | | | |

**Μονάδες 11**

β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

**Μονάδες 8**

γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό το πολύ μέχρι και 10;

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι $\frac{7}{8}$.

(ii) Οι πιθανότητες P(B) , P(A∩B) δεν είναι ίσες και ανήκουν στο

σύνολο $X = \{k, 1/2, 5/4\}$ όπου

$$k = \lim_{x \to 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5}$$

α. Να βρεθεί το k.

**Μονάδες 5**

β. Να βρεθούν τα P(B), P(A∩B) και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

**Μονάδες** 8

**γ.** Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.

**Μονάδες 6**

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{x}$ , $\chi \in (0,+\infty)$ .

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Λ(1,1).

**Μονάδες 7**

β. Από τυχαίο σημείο Μ(x, y) της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες χχ' και yy', οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

**Μονάδες 10**

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $S_x = 2$.

Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση $S_y$ των τεταγμένων των σημείων αυτών.

**Μονάδες 8**

**ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΗ**

Στο Θέμα 2ο η ερώτηση **γ.** επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό <u>**το πολύ**</u> μέχρι και 10.

Στο Θέμα 1ο ερώτημα **Α.**

Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να θεωρηθούν ισοπίθανα.

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** Σχολικό βιβλίο σελ 151.3

**Β.** Σχολικό βιβλίο σελ 59.2

**Γ.** **α.** Σωστό
**β.** Λάθος
**γ.** Λάθος
**δ.** Λάθος

### ΘΕΜΑ 2ο

**α.**

| Κλάσεις βαθ/γιας [ ) | Κέντρο κλάσης $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ | Αθροιστική Συχνότητα $N_i$ | Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [4, 8) | 6 | 5 | 0,10 | 5 | 0,10 |
| [8, 12) | 10 | 10 | 0,20 | 15 | 0,30 |
| [12, 16) | 14 | 25 | 0,50 | 40 | 0,80 |
| [16, 20) | 18 | 10 | 0,20 | 50 | 1,00 |
| Σύνολο | | 50 | 1,00 | | |

**β.** $\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i = \frac{5\cdot 6 + 10\cdot 10 + 25\cdot 14 + 10\cdot 18}{50} = \frac{660}{50} = 13{,}2$

**γ.** Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση.

Άρα οι μαθητές που έχουν βαθμό το πολύ μέχρι και 10 είναι $5+\frac{10}{2}=10$.

**Θέμα 3ο**

**α.** $\kappa=\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x-15}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-1)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{3}{x-1}=\frac{3}{4}$

β. Είναι X=$\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right\}$. Επειδή $\frac{5}{4}>1$ ο αριθμός $\frac{5}{4}$ δεν μπορεί να είναι πιθανότητα ενδεχομένου.

Αφού $A\cap B\subseteq B$ τότε $P(A\cap B)\leq P(B)$ και επειδή $P(A\cap B)\neq P(B)$ θα είναι $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{3}{4}$

γ. Έχουμε $P(A\cup B)=\frac{7}{8}$

(1) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$
$$P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)=$$
$$=\frac{7}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$$

(2) $$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

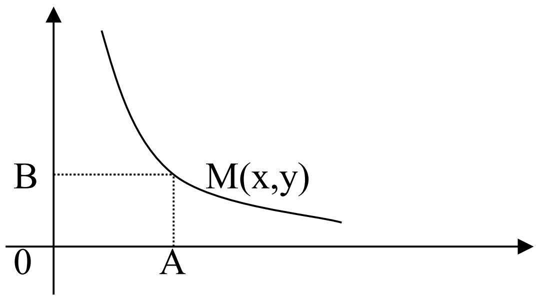
**θέμα 4ο**

α. $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}, x\in(0,\propto)$

Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της Λ(1,1) έχει εξίσωση ε: y=λx+β όπου $\lambda=f'(1)=-1$.

Άρα ε: y=-x+β.

Αφού η ε διέρχεται από το σημείο Λ(1,1) τότε : 1=-1+β$\Leftrightarrow$ β=2. Άρα ε : y=-x+2 β.




Το ορθογώνιο ΟΑΜΒ έχει περίμετρο Π=2x+2y=2x+$\frac{2}{x}, x > 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{2}{x}, x \in (0,+\infty)$

$\Pi'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^2-1)}{x^2}$

$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

| x | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|
| Π'(x) | − | o | + |
| Π(x) | ↘ | min | ↗ |

Για x=1 οπότε y=1 η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ελάχιστη.

γ. Η εξίσωση εφαπτομένης της $C_f$ στο Λ(1,1) είναι ε : y=-x+2.

Επειδή $\bar{x} = 5$ και $s_x = 2$ τότε

$\bar{y} = -\bar{x} + 2 = -5 + 2 = -3$ και $s_y = |-1| \cdot s_x = 2$


ΓΙΔΑΡΑΚΟΣ Θ. – ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ Ι. – ΚΟΝΤΑΞΗΣ Ι. – ΚΟΥΣΗΣ Π.
ΠΑΡΙΑΝΟΣ Σ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε.
Επιμέλεια:
Α. ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ