

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2006
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . και c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 10

Β.α. Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 3

β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

Μονάδες 2

β. Αν το ενδεχόμενο A' , συμπληρωματικό του ενδεχομένου A , πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το A .

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ ισχύει: .

Μονάδες 2

δ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

| Αριθμός Βιβλίων x_i | Αριθμός Μαθητών v_i |
|--------------------------|--------------------------|
| 0 | $\alpha+4$ |
| 1 | $5\alpha+8$ |
| 2 | 4α |
| 3 | $\alpha-1$ |
| 4 | 2α |
| Σύνολο | 50 |

α. Να υπολογίσετε την τιμή του α .

Μονάδες 3

Στη συνέχεια να βρείτε:

β. Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

Μονάδες 7

γ. Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

Μονάδες 7

δ. Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

Μονάδες 7

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι $\frac{1}{19}$ είναι ίση με και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

Μονάδες 8

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής; (Δίνεται $x \in \mathbb{R}$)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -4\sqrt{x} - 2x^2 + kx + 10, x \geq 0$.

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $k=2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 5

β. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{X} = f(1) - \frac{2f'(4)}{13}$ και τυπική απόκλιση $s = -$. Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του

8.

(i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10,16)$.

Μονάδες 10

(ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2006
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1°

- A.** Σχολικό βιβλίο, σελ.: 30
B. α) Σχολικό βιβλίο, σελ.: 142
 β) Σχολικό βιβλίο, σελ.: 16
Γ. α) Σωστό
 β) Σωστό
 γ) Λάθος
 δ) Λάθος

Θέμα 2°

- α) Ισχύει: $v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=v$ δηλαδή
 $\alpha+4+5\alpha+8+4\alpha+\alpha-1+2\alpha=50$ ή
 $13\alpha=39 \Leftrightarrow \alpha=3$

β)

| X_i | v_i | $x_i v_i$ | Αθρ. Συχνότη. N_i |
|-------|--------|-----------|---------------------------|
| 0 | 7 | 0 | 7 |
| 1 | 23 | 23 | 30 |
| 2 | 12 | 24 | 42 |
| 3 | 2 | 6 | 44 |
| 4 | 6 | 24 | 50 |
| | $v=50$ | 77 | |

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i x_i = \frac{77}{50} = 1,54$$

- γ) Η διάμεσος (δ) βρίσκεται στη θέση $\frac{v+1}{2} = \frac{50+1}{2} = 25,5$

$$\delta = \frac{25^{\text{η}} \text{ παρατ.} + 26^{\text{η}} \text{ παρατ.}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

(Όλες οι παρατηρήσεις από την 8^η έως και την 30^η αντιστοιχούν στο $x=1$)

- δ) $P(\text{τουλάχιστο 3 βιβλία}) = P(x \geq 3) = \frac{8}{50} = 0,16$ ή 16%

Θέμα 3°

α) Το σύνολο των ατόμων του ομίλου είναι $x+(x+4)^2$ άτομα
 Ο αριθμός των αγοριών είναι x
 Η πιθανότητα του ενδεχόμενου ο εκπρόσωπος να είναι αγόρι

είναι $P(x) = \frac{x}{x+(x+4)^2}$

β) $P(x) = \frac{1}{19}$ ή $\frac{x}{x+(x+4)^2} = \frac{1}{19} \Leftrightarrow x+x^2+8x+16=19x \Leftrightarrow x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow x=2$
 ή $x=8$

i. Για $x=2$ τα αγόρια είναι 2 και τα κορίτσια 36

ii. Για $x=8$ τα αγόρια είναι 8 και τα κορίτσια 144


Η **ii** απορρίπτεται αφού ο όμιλος έχει λιγότερο από 100 μέλη.

Οπότε η πιθανότητα ο εκπρόσωπος να είναι κορίτσι είναι $\frac{36}{38} \approx 0,95$ ή 95%.

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $P(x) = \frac{x}{x+(x+4)^2}, 0 < x \leq 5$ αφού για $x \geq 6$ ο αριθμός των ατόμων υπερβαίνει το 100.

$$P'(x) = \frac{x+(x+4)^2 - x[1+2+(x+4)]}{[x+(x+4)^2]^2} = \frac{x+x^2+8x+16-x-2x^2-8x}{[x+(x+4)^2]^2} = \frac{-x^2+16}{[x+(x+4)^2]^2}$$

Το πρόσημο και οι ρίζες της $P'(x)$ δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

| | | | |
|---------|--|---|---|
| x | 0 | 4 | 5 |
| $P'(x)$ | + | 0 | - |
| $P(x)$ |  | | |

Η πιθανότητα να είναι αγόρι μεγιστοποιείται όταν $x=4$ και η

μέγιστη τιμή της είναι $P(4) = \frac{4}{4+(4+4)^2} = \frac{4}{68} \approx 0,058$ ή 5,8%

Θέμα 4^ο

α) Έστω $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10, x \geq 0$

$$f'(x) = -4x + k + 2 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι // στον $x'x$ οπότε $f'(1) = 0$ δηλαδή $-4 + k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι:

$$y = f'(1)x + \beta$$

ή $y = 0x + \beta$
 ή $y = \beta$

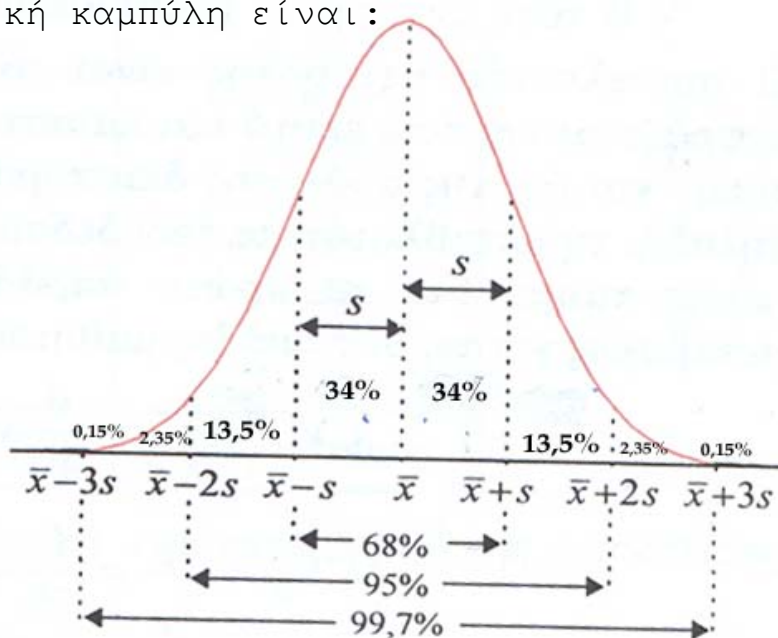
$f(1) = 14$ οπότε $y = 14$

β) Για $k = 2$ είναι $f(x) = -2x^2 + 2x + 4\sqrt{x} + 10$ και $f'(x) = -4x + 2 + \frac{2}{\sqrt{x}}$

$$\bar{X} = f(1) = -2 + 2 + 4 + 10 = 14$$

$$S = -\frac{2f(4)}{13} = \frac{-2 \cdot (-13)}{13} = 2$$

Η κανονική καμπύλη είναι:



$\bar{X} = 14$ και $S = 2$

με απλή μέθοδο των τριών έχουμε:

το 0,15% των παρατηρήσεων είναι 3
 το 100% >> >> >> x;

$$x=3 \cdot \frac{100}{0,15} = 2000$$

(i) Το ποσοστό των παρατηρήσεων $P(10 \leq x \leq 16)$ είναι:
 $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$ δηλαδή $2000 \cdot 81,5\% = 1630$ παρατηρήσεις

(ii) $CV_x = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{14} = 0,143$ ή $14,3\% > 10\%$ άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Αν σε κάθε τιμή προστεθεί το $\alpha > 0$ τότε: $\bar{y} = \bar{x} + \alpha = 14 + \alpha$ και $S_y = S_x = 2$

$$CV_y = \frac{2}{14 + \alpha} \leq 0,10 \Leftrightarrow (14 + \alpha) \cdot 0,10 \geq 2 \Leftrightarrow 1,4 + 0,10\alpha \geq 2 \Leftrightarrow 0,10\alpha \geq 0,6 \Leftrightarrow \alpha \geq 6$$

Άρα η μικρότερη τιμή του α είναι το 6.

