

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ)** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

**ε)** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 9**

**B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό).

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση  $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Αν  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Αν η  $f$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν  $x \in [0, +\infty)$ .

**Μονάδες 9**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta\mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(\pi) = \pi$  (μονάδες 4) και  $f'(0) = 1$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** α) Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 2)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να δείξετε ότι  $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$ .

**Μονάδες 6**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 262.

**A2.** Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 141.

**A3.** Θεώρημα σχολικού βιβλίου σελίδα 246.

**A4. α.** Λάθος

**β.** Σωστό

**γ.** Λάθος

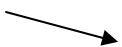
**δ.** Σωστό

**ε.** Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

**B1.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = \dots = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ .

Το πρόσημο της  $f'$  και τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$  | $-\infty$                                                                           | $0$ | $+\infty$                                                                           |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'$ | -                                                                                   |     | +                                                                                   |
| $f$  |  |     |  |

Ο.Ε.

Η  $f$  είναι γν. φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$ , η  $f$  είναι γν. αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

Στο  $x=0$  η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο το  $f(0)=0$ .

**B2.** Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f''(x) = \dots = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3}$ .

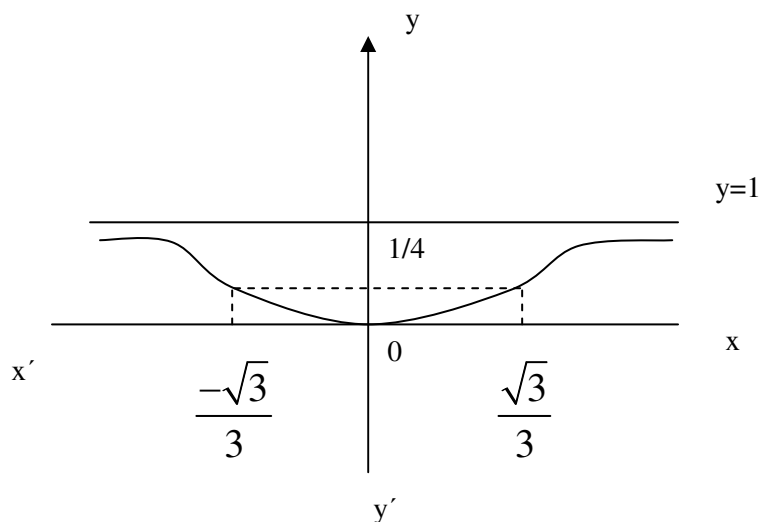
Το πρόσημο της  $f''$  και τα διαστήματα κυρτότητας της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

|       |                                                                                   |               |                                                                                   |                                                                                   |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| x     | $-\infty$                                                                         | $-\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{3}/3$                                                                      | $+\infty$                                                                         |
| $f''$ | -                                                                                 |               | +                                                                                 | -                                                                                 |
| f     |  |               |  |  |
|       |                                                                                   | Σ.Κ           | Σ.Κ                                                                               |                                                                                   |

Η  $f$  είναι κυρτή στο  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ , η  $f$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$  και στο  $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ . Τα σημεία  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$  και  $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$  είναι σημεία καμπής της  $C_f$ .

**B3.** Επειδή  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$  τότε η ευθεία  $y=1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ . Επίσης η  $C_f$  δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

**B4.**



### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^x - x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = e^x - 1$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα στο  $x_0=0$  η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $g(0)=0$ .

Επομένως  $g(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Το ίσον ισχύει μόνο για  $x=0$ .

$$\text{Έχουμε } e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Γ2. Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1|$  και αφού  $e^{x^2} - x^2 - 1 > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  τότε  $|f(x)| = e^{x^2} - x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .

- Η συνάρτηση  $f$  στο  $(-\infty, 0)$  είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, οπότε η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(-\infty, 0)$ .

- Αν  $f(x) > 0$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  τότε  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

- Αν  $f(x) < 0$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  τότε  $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

- Η συνάρτηση  $f$  στο  $(0, +\infty)$  είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, οπότε η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(0, +\infty)$ .

- Αν  $f(x) > 0$ ,  $x \in (0, +\infty)$  τότε  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

- Αν  $f(x) < 0$ ,  $x \in (0, +\infty)$  τότε  $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

$$\text{Άρα } f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R} \text{ ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x > 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$$

**Γ3.** Έχουμε  $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και

$$f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 \cdot e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύουν  $e^{x^2} - 1 > 0$  και  $x^2 \cdot e^{x^2} > 0$

Άρα  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  και αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

**Γ4.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x+3) - f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = f'(x+3) - f'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  τότε η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και αφού  $x+3 > x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  τότε  $f'(x+3) > f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Επομένως  $h'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε η  $h$  είναι 1-1.

Για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  έχουμε  $f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$

$$\Leftrightarrow h(|\eta\mu x|) = h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x \Leftrightarrow x = 0$$

## **ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$ .

Θέτουμε  $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$  για  $x$  κοντά στο 0, οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$  και

$f(x) = g(x) \cdot \eta\mu x$  για  $x$  κοντά στο 0.

Άρα  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot \eta\mu x) = 1 \cdot 0 = 0$  αφού η  $f$  είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

Έχουμε  $\int_0^\pi f(x) + f''(x) \eta\mu x \, dx = \pi \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi$  οπότε  $f(\pi) = \pi$ .

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu x}{x} = 1$$

**Δ2. α)** Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  έχουμε  
 $(e^{f(x)} + x)' = (f(f(x)) + e^x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x,$   
 $x \in \mathbb{R} \quad (1)$

Έστω ότι η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x=x_0$ . Από θ. Fermat έχουμε  $f'(x_0)=0$ . Οπότε η σχέση (1) για  $x=x_0$  γίνεται  $e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$  δηλαδή  $f'(0)=0$  ΑΤΟΠΟ αφού  $f'(0)=1$ . Άρα η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ .

**β)** Αφού  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η  $f'$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Επειδή  $f'(0)=1 > 0$  τότε  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ3.** Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  αφού  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και η  $f$  είναι γν. αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  ισχύει  $f(x) > f(0) = 0$  και

$$\left| \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)} \right| = \frac{|\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{|\eta \mu x| + |\sigma \upsilon \nu x|}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Άρα  $-\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$  και αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0, \quad \text{τότε από το κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\text{προκύπτει ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)} = 0$$

**Δ4.** Θέτουμε  $u = \ln x$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Για  $x=1$ :  $u = \ln 1 = 0$

Για  $x=e^\pi$ :  $u = \ln e^\pi = \pi$

$$\text{Άρα } \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du$$

## ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $[0, \pi]$  οπότε για κάθε  $u \in [0, \pi]$  ισχύει ότι  $f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Leftrightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi \Leftrightarrow f(u) \geq 0$  και  $\pi - f(u) \geq 0$  με το ίσον να ισχύει μόνο για  $x=0$ .

$$\text{Άρα } \int_0^\pi f(u) du > 0 \quad \text{και} \quad \int_0^\pi (\pi - f(u)) du > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u) du > 0 \quad \text{και}$$

$$[\pi x]_0^\pi - \int_0^\pi f(u) du > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u) du > 0 \quad \text{και}$$

$$\int_0^\pi f(u) du < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$$

$$\text{Επομένως } 0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ  
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

[www.floropoulos.gr](http://www.floropoulos.gr)

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. –  
ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.