ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=1$.

β) Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

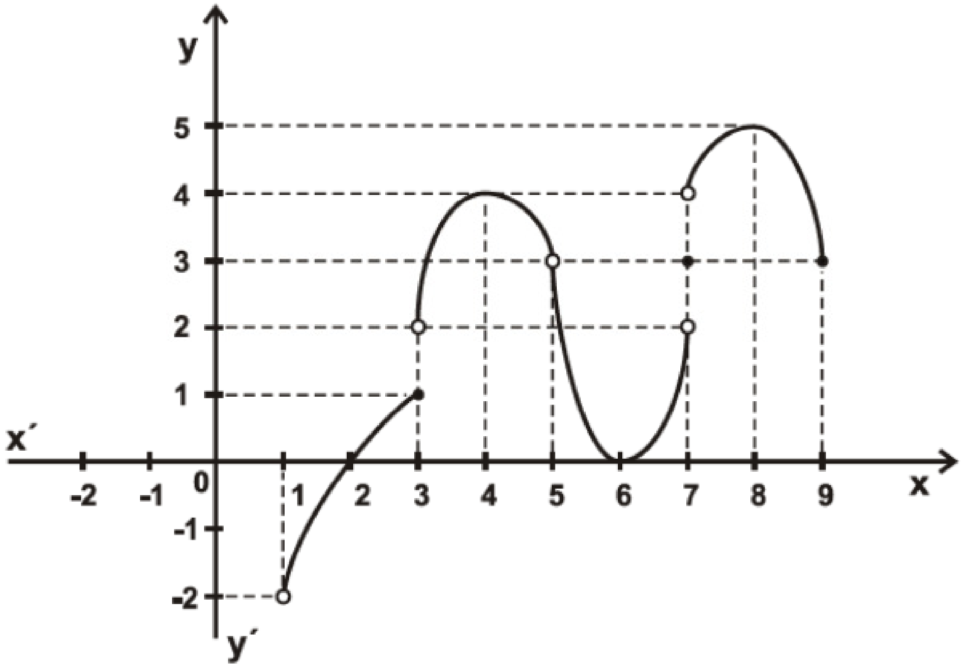
ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχής στο [α, β], ισχύει:

αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$, τότε $f(x)>0$ στο [α, β].

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτηση f.



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$.

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0)=0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστοφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=x3, x≥0 με x=x(t) και y=y(t). Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y(t) του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x(t), αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g:R\to R$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x}+1 & , 0<x<1 \\ 1 & , x=1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & , x>1 \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Μονάδες 8

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-x_0^2-2x_0+2}{2}$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2), \text{ για κάθε } x>1.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 260-261.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 169.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 280.

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Α=(1, 5)∪(5, 9)

f(A)=(-2, 5].

Β2. α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$

β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ δεν υπάρχει διότι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 3$

δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x) =$ δεν υπάρχει διότι $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$ και $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4$

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = 3$

Β3. α) Για $x\to 2^-$ είναι f(x)<0 και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Για $x\to 2^+$ είναι f(x)>0 και $\lim\limits_{x\to 2^+} = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} = \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$.

β) Για $x\to 6$ είναι f(x)>0 και $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

γ) Θέτουμε f(x)=u για $x \to 8$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 5$ οπότε $u \to 5$ άρα $\lim\limits_{u\to 5} f(u) = 3$

Β4. Η f δεν είναι συνεχής στο $x_1=3$ διότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Η f δεν είναι συνεχής στο $x_2=7$ διότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$.

Β5. Η f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο $x_0=4$ και δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. Οπότε $f'(4)=0$.

Η f παρουσιάζει τ. ελάχιστο στο $x_0=6$ και δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. Οπότε $f'(6)=0$.

Η f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο $x_0=8$ και δέχεται οριζόντια εφαπτομένη τότε $f'(8)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x\in R$ έχουμε $f'(x)=3x^2>0$ για κάθε $x\in R-\{0\}$.

Η f είναι συνεχής στο R όπότε f↑ στο R οπότε και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$ για $y\geq 0$ ή

$x = -\sqrt[3]{-y}$ για $x<0$.

Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , x<0 \end{cases}$

Γ2. Θεωρούμε την $h(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3$, $x\in R$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (R) με $h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}x^2$

Η h΄ είναι παραγωγίσιμη στο (R) με $h''(x) = -\eta\mu x + x = -(\eta\mu x - x)$

Για $x>0$, $\eta\mu x<x \Leftrightarrow \eta\mu x-x<0$ οπότε $h''(x)>0$ για κάθε $x>0$ άρα η h΄↑ στο $[0, +\infty)$.

Για x>0 έχουμε $h'(x)>h'(0)$ ή

$h'(x)>0$ άρα η h είναι $\uparrow$ στο $[0, +\infty)$

Άρα για x>0 έχουμε $h(x)>h(0)$ δηλ. $\eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0$ ή $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$

και αφού f$\uparrow$ στο R έχουμε $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$.

Γ3. $y(t)=x^3(t)$

$y'(t)=3x^2(t)\cdot x'(t)$

Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε $y'(t_0)=x'(t_0)$

$x'(t_0)=3x^2(t_0)\cdot x'(t_0)$ $(x'(t)>0)$

$3x^2(t_0)=1 \to x^2(t_0)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ αφού $x(t_0)>0$.

Οπότε $y(t_0)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{27}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

Άρα στο σημείο $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Η g είναι άρτια στο R οπότε για κάθε x, $-x\in R$ είναι $g(-x)=g(x)$.

Έχουμε $\int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx = I$.

Θέτουμε $x=-t$ οπότε $dx=-dt$

Για $x=-1$ είναι $t=1$

$x=1$ είναι $t=-1$ οπότε

$$I=\int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx=\int_{1}^{-1}(-t)^3 g(-t)dt=-\int_{-1}^{1} t^3 g(t)dt=-I$$

Άρα $2I=0 \Leftrightarrow I=0$

Οπότε $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο (0, 1) και (1, +∞) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Στο x=1

- f(1)=1
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

Άρα η f είναι συνεχής και στο x=1 οπότε είναι συνεχής στο (0, +∞)

Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη η ευθεία x=0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right) = -\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\frac{1}{x}\right) = -\infty$

$\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty\right)$

Άρα x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Δ2. Κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης f΄(x)=0 και τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η f΄.

Για 0<x<1 είναι $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}+1\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} > 0$ αφού για x<1 είναι lnx<0 οπότε f΄(x)>0 για κάθε x∈(0, 1).

Για x>1 είναι $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$

Θεωρούμε h(x)=x-1-xlnx, x≥1.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο [1, +∞) με h΄(x)=1-1-lnx= -lnx<0 αφού για x>1 είναι lnx>0. Άρα η h είναι γν. φθίνουσα στο [1, +∞). Οπότε για x>1 είναι h(x)<h(1) δηλ. h(x)<0.

Άρα f΄(x)<0 για κάθε $x\in(1, +\infty)$

Στο x=1

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{\ln x}{x}+1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=1.

Οπότε το x=1 είναι το κρίσιμο σημείο της f.

Δ3. Η f είναι συνεχής στο (0, +∞) και

i. α) f΄(x)>0 για κάθε $x\in(0, 1]=A_1$ οπότε η f είναι γν. αύξουσα στο A_1 άρα $f(A_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$.

Το Ο περιέχεται στο $f(A_1)$ άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική (f↑) ρίζα στο A_1.

i. β) $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[1,+\infty)=A_2$ οπότε η f είναι γν. φθίνουσα στο A_2 άρα $f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=(0,1]$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Το Ο δεν περιέχεται στο $f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο A_2.

Οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μόνο μια ρίζα στο $A_1=(0,1)$.

ii. $E(\Omega)=\int_{x_0}^{1}|f(x)|dx$ αφού $0<x_0<1$.

Για $x_0<x<1$ έχουμε ($f\uparrow$)

$f(x_0)<f(x)<f(1)$ ή $0<f(x)<1$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[x_0,1]$ οπότε

$$E(\Omega)=\int_{x_0}^{1}f(x)dx=\int_{x_0}^{1}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)dx=\int_{x_0}^{1}\left(\ln\frac{1}{x}+1\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{1}2\ln x(\ln x)'dx+\int_{x_0}^{1}1dx=\frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_{x_0}^{1}+\left[x\right]_{x_0}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln x^2 1-\ln^2 x_0\right)+\left(1-x_0\right)=-\frac{1}{2}\ln^2 x_0+1-x_0=$$

$$=\frac{-\ln^2 x_0+2-2x_0}{2}=\frac{-x_0^2+2+2x_0}{2}\ \text{τ.μ.}$$

$$\left(f(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x_0}{x_0}+1=0\Leftrightarrow\frac{\ln x_0}{x_0}=-1\Leftrightarrow\ln x_0=-x_0\right)$$

Δ4. Για $x>1$ έχουμε

$xF(x)+F(x)>xF(1)+F(x^2)\Leftrightarrow$

$xF(x)-xF(1)>F(x^2)-F(x)\Leftrightarrow$

$x[F(x)-F(1)]>F(x^2)-F(x)\overset{x^2-x>0\ \text{ΑΦΟΥ}\ x>1}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{x\left[F(x)-F(1)\right]}{x^2-x} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(x)-F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}$$

Επειδή $1<x<x_2$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την F στα $[1, x]$, $[x, x_2]$ όπου είναι συνεχής και παραγωγίσιμη άρα υπάρχουν

$$\xi_1 \in (1,x) : F'(\xi_1) = \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = f(\xi_1)$$

και $\xi_2 \in (x,x^2) : F'(\xi_2) = \dfrac{F(x^2)-F(1)}{x^2-x} = f(\xi_2)$

και επειδή $\xi_1<\xi_2$ έχουμε $f(\xi_1)>f(\xi_2)$ ($f\downarrow$ στο $(1, +\infty)$)

άρα $\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1} > \dfrac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}$ οπότε ισχύει.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr