ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 8

Α2. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

β) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 3

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:*

α) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

Μονάδες 2

β) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

γ) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Μονάδες 2

δ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

ε) Τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ είναι μόνο εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγός της είναι ίση με 0.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, x∈R.

Β1. α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση $2f(x^2-1)<1$.

Μονάδες 6

Β2. α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

β) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο καμπής και να δείξετε ότι $4f(x)-x \geq 2$ για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Μονάδες 6

Β4. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από C_f, τον x΄x και τις ευθείες x=0, x=1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g R→R όπου f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x \cdot f^2(x)$, $f(x) \neq 0$ για κάθε x∈R, f(0)=1 και $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$ για κάθε x∈R.

Γ1. Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή στο R.

Μονάδες 7

Γ2. Αποδείξτε ότι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, x∈R.

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to +\infty}(xf(x)\eta\mu 2x)$.

Μονάδες 5

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

Γ4. Να προσδιορίσετε το σημείο της C_f στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: [0, +∞)→IR με:

- f(0)=1
- f παραγωγίσημη στο (0, +∞) με: $2x<f\,'(x)<e^x$, x>0
- f(α)=β, α, β∈(0, +∞)

Να δείξετε ότι

Δ1. $x^2+1<f(x)<e^x$, για κάθε x>0.

Μονάδες 5

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Αν f^{-1} συνεχής και ισχύει:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$$

τότε f(β)=α.

Μονάδες 5

Δ3. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f\,'(\xi_1)+f\,'(\xi_2)= -2$

Μονάδες 5

Δ4. Η εξίσωση $f(x)=2x^2$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

Μονάδες 5

Δ5. Αν Ε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον x΄x, y΄y και την x=1 να δείξετε ότι: $\frac{4}{3}<E<e$.

Μονάδες 5

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ