

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές Θετικής Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ' τάξης Ενιαίου Λυκείου.

>1^o Θέμα: Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbb{N} και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$$

να προσδιορίσετε το $k \in \mathbb{N}$, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x) + k^2 \eta \mu^2 x}{-2f(x) \cdot \eta \mu x + 3x^2} = 3$$

>2^o Θέμα:

Έστω $f: (-\infty, -2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\frac{|z|^{k+1}}{x+2} \leq f(z) \leq \frac{|z|^{k-1}}{x+2}$ όπου $z \in \mathbb{C}^*$

Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$ του επιπέδου.

>3^o Θέμα: Αν F ορισμένη στο \mathbb{N} και συνεχής στο $x_0 = 0$ με

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - \eta \mu 2x}{x} = 4$$

να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_F στο σημείο με τετραγωνική $x_0 = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1^o ΘΕΜΑ

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + k^2 \eta \mu^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + k^2 \left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^2}{x} = \\ & = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} + k^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu}{x}\right)^2}{-2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} + 3} = \frac{-1 + k^2}{-2(-1) + 3} = \frac{k^2 - 1}{5} \end{aligned}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2^o ΘΕΜΑ

Για $x < -2$: $\frac{|z|x^2 + 1}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{|z|x^2 - 1}{x+2}$ ή

$$\frac{|z|x^2 + 1}{x^2 + 2x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{|z|x^2 - 1}{x^2 + 2x} \text{ αφού } \frac{1}{x} < 0$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|z|x^2 + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|z|x^2}{x^2} = |z|$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|z|x^2 - 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|z|x^2}{x^2} = |z|$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = |z|$

Από υπόθεση $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

Άρα $|z| = 3$

Δηλαδή τα $M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου $(0, 0)$

και ακτίνας $R = 3$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 3^o ΘΕΜΑ

Αν θέσουμε

$$g(x) = \frac{F(x) - \eta \mu 2x}{x}, x \neq 0$$

τότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4$ και $F(x) = x \cdot g(x) + \eta \mu 2x$.

Αφού F συνεχής στο $x_0 = 0$ τότε

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot g(x) + \eta \mu 2x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu 2x =$$

$$= 0 \cdot 4 + 0 = 0$$

Διλαδή $F(0) = 0$

Για κάθε $x \neq 0$ ουμε:

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot g(x) + \eta \mu 2x}{x} = g(x) + 2 \cdot \frac{\eta \mu 2x}{2x}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} [g(x) + 2 \cdot \frac{\eta \mu 2x}{2x}] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x}{2x} =$$

$$= 4 + 2 \cdot 1 = 6$$

Διλαδή η παραγωγή στο $x_0 = 0$ με $F'(0) = 6$.

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_F στο σημείο $(0, 0)$ είναι:

$$yF(0) = F'(0) \cdot (x-0) \text{ ή } y = 6x$$

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

« ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ »

Α. ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΛΑΤΕΙΑ ΚΑΝΙΓΓΟΣ - Λ.ΒΟΥΛΙΑΓΜΕΝΗΣ - ΑΝΩ ΓΑΥΦΑΔΑ