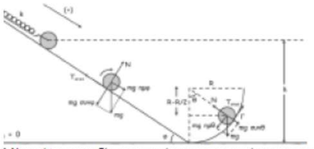
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2010
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Φυσική Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

ΑΣΚΗΣΗ:
Ομογενής δίσκος μάζας m και ακτίνας r είναι προσαρμοσμένος σε ελατήριο σταθεράς k=600N/m και το κέντρο μάζας του εκτελεί απλές αρμονικές ταλαντώσεις, κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει, σε κεκλιμένο δάπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^o$. Ο δίσκος έχει στον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, ανιχνευτή ηχητικών κυμάτων, ο οποίος δέχεται τα ηχητικά κύματα που παράγει πηγή που βρίσκεται σε ακλόνητο σημείο στην ευθεία ταλάντωσης του κέντρου μάζας του δίσκου. Ο ανιχνευτής καταγράφει την πραγματική συχνότητα που εκπέμπει η πηγή κάθε π/10 s, ενώ ο λόγος του εύρους των συχνοτήτων που λαμβάνει ο δέκτης προς την εκπεμπόμενη συχνότητα από την πηγή είναι ίση με 1/34. Η γωνία που διαγράφει μία ακτίνα του δίσκου μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητάς του κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι 5rad. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του κέντρου μάζας του δίσκου στο σημείο που αποσπάται ο δίσκος από το ελατήριο ως προς τη βάση του κεκλιμένου δαπέδου είναι 16 φορές η μέγιστη κινητική ενέργεια του δίσκου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.



α) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για την Α.Α.Τ. του κέντρου μάζας του δίσκου αν γνωρίζετε ότι τη στιγμή που ξεκίνησε η ταλάντωση το ελατήριο είχε τη μέγιστη επιμήκυνσή του. Σαν θετική φορά θεωρείστε τη φορά κίνησης προς τη βάση του κεκλιμένου δαπέδου.
β) Αν τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μέγιστη ο δίσκος αποσπάται από το ελατήριο και αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο κεκλιμένο δάπεδο να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου.
γ) Φτάνοντας στη βάση του κεκλιμένου δαπέδου ο δίσκος εισέρχεται σε τεταρτοκύκλιο ακτίνας R=6 m στο οποίο συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε όταν ο δίσκος βρίσκεται σε ύψος R/2 από το κατώτερο σημείο της κίνησής του το μέτρο της δύναμης που διέχεται ο δίσκος από το δάπεδο και η οποία έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.
Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I=1/2\ m\ r^2$. Η ακτίνα του δίσκου θεωρείται αμελητέα σε σχέση με την ακτίνα του τεταρτοκυκλίου.
Η ταχύτητα του ήχου είναι $u_{ηχ}=340$ m/s. Δίνεται $g=10\ m/s^2$.
Η σταθερά επαναφοράς της Α.Α.Τ. του κέντρου μάζας είναι 2k/3 όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) Ο ανιχνευτής καταγράφει την πραγματική συχνότητα που εκπέμπει η πηγή όταν η ταχύτητα του είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει στις ακραίες θέσεις της Α.Α.Τ. του κάθε T/2 οπότε

$$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{10}\rightarrow T=\frac{\pi}{5}\ s$$

Επίσης ισχύει $D=\frac{2k}{3}=\frac{2\cdot 600}{3}\rightarrow D=400N/m$

Άρα η μάζα του δίσκου είναι:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}\rightarrow\frac{\pi}{5}=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}\rightarrow\frac{1}{100}=\frac{m}{400}\rightarrow m=4Kg.$$

Το εύρος των συχνοτήτων που καταγράφει ο ανιχνευτής είναι ίσο με τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης συχνότητας και είναι ίσο με:

$$f_{max}-f_{min}=\frac{u_{ηχ}+u_0}{u_{ηχ}}f-\frac{u_{ηχ}-u_0}{u_{ηχ}}f=\frac{2u_0 f}{u_{ηχ}}$$

Συνεπώς ο λόγος του εύρους των συχνοτήτων που καταγράφει ο ανιχνευτής προς τη συχνότητα που εκπέμπει η πηγή είναι:

$$\frac{f_{max}-f_{min}}{f}=\frac{1}{34}\rightarrow\frac{\frac{2u_0 f}{u_{ηχ}}}{f}=\frac{1}{34}\rightarrow$$

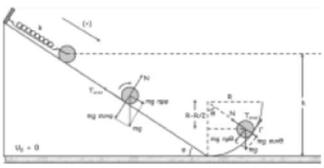
$$\rightarrow\frac{2u_0}{u_{ηχ}}=\frac{1}{34}\rightarrow u_0=5m/s$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το κέντρο μάζας του δίσκου είναι:

$$u_0=\omega A\rightarrow u_0=\frac{2\pi}{T}A\rightarrow A=\frac{u_0 T}{2\pi}=\frac{5\frac{\pi}{5}}{2\pi}\rightarrow A=0{,}5m.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή που ξεκινά η ταλάντωση το ελατήριο έχει τη μέγιστη επιμήκυνσή του το σύστημα βρίσκεται σε ακραία θέση και μάλιστα στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.
Άρα η αρχική φάση είναι $\varphi_0=\pi/2$ rad.
Συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσης της Α.Α.Τ. που εκτελεί το κέντρο μάζας του δίσκου δίνεται από τη σχέση:

$$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\rightarrow x=0{,}5\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})\ (S.I.).$$



β) Η απόσταση που διανύει ο δίσκος μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης, όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται, είναι ίσο με το διπλάσιο του πλάτους της ταλάντωσης και επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει η ακτίνα του δίσκου θα βρεθεί από τη σχέση:

$$S=2A\rightarrow r\theta=2A\rightarrow r=\frac{2A}{\theta}=\frac{2\ 0{,}5}{5}\rightarrow r=0{,}2\ m.$$

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύουν οι σχέσεις: $u=\omega R$ (1), $\alpha=\alpha_\gamma r$ (2) $s=r\theta$ (3).
Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F=m\cdot\alpha\rightarrow mg\ \eta\mu\varphi-T_{στατ}=m\alpha\ (4).$$

Από το νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau=I\ \alpha_\gamma\rightarrow T_{στατ}\ r=\frac{1}{2}m\ r^2\alpha_\gamma\rightarrow$$

$$\rightarrow T_{στατ}=\frac{1}{2}m\ r\ \alpha_\gamma=\frac{1}{2}m\ \alpha\ (5)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη (4) και (5) έχουμε:

$$mg\eta\mu\varphi-T_{στατ}+T_{στατ}=m\alpha+\frac{1}{2}m\alpha\rightarrow mg\eta\mu\varphi=\frac{3}{2}m\alpha\rightarrow$$

$$\alpha=\frac{2g}{3}\eta\mu\varphi\rightarrow\alpha=\frac{10}{3}m/s^2$$

γ) Αφού η βαρυτική δυναμική ενέργεια του κέντρου μάζας του δίσκου στο σημείο που αποσπάται ο δίσκος από το ελατήριο ως προς τη βάση του κεκλιμένου δαπέδου είναι 16 φορές η μέγιστη κινητική ενέργεια του δίσκου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης θα έχουμε:

$$U_{αρχ}=16K_{\alpha\lambda}\rightarrow mg\ h=16(\frac{1}{2}m\ u_0^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2)\rightarrow$$

$$mg\ h=16(\frac{1}{2}m\ u_0^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}m\ r^2\omega_0^2)\xrightarrow{u_0=\omega r_0}$$

$$mg\ h=16\frac{3}{4}m\ u_0^2\rightarrow h=12\frac{u_0^2}{g}\rightarrow h=30\ m.$$

Θα βρούμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου στο ζητούμενο σημείο (Γ) εφαρμόζοντας Α.Δ.Μ.Ε.

$$E_{μηχ}^{αρχ}=E_{μηχ}^{τελ}\rightarrow K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$\rightarrow mg\ h=\frac{1}{2}m u_Γ^2+\frac{1}{2}I\omega^2+m\ g\frac{R}{2}\rightarrow$$

$$mg\ h=\frac{1}{2}m\ u_Γ^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}m r^2\omega^2+mg\frac{R}{2}\rightarrow$$

$$\rightarrow gh-g\frac{R}{2}=\frac{1}{2}u_Γ^2+\frac{1}{4}u_Γ^2\rightarrow 300-30=\frac{3}{4}u_Γ^2\rightarrow u_Γ=\sqrt{360}m/s.$$

Από το θεμελιώδη νόμο για την κυκλική κίνηση του κέντρου μάζας του στερεού σώματος όταν αυτό εισέρχεται στο τεταρτοκύκλιο και παίρνουμε:

$$\Sigma F_R=m\frac{u_Γ^2}{R}\rightarrow N-mg\ \sigma\upsilon\nu\theta=m\frac{u_Γ^2}{R}\rightarrow N=m\frac{u_Γ^2}{R}+mg\ \sigma\upsilon\nu\theta\rightarrow$$

$$\rightarrow N=m\frac{u_Γ^2}{R}-mg\frac{R-\frac{R}{2}}{R}\rightarrow N=240+20=260N$$

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ»
Α. ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΛΑΤΕΙΑ ΚΑΝΙΓΓΟΣ - Λ.ΒΟΥΛΙΑΓΜΕΝΗΣ - ΑΝΩ ΓΛΥΦΑΔΑ