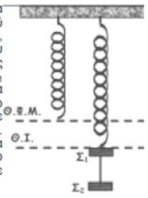
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2010
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Φυσική Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

Από την οροφή εξαρτάται το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=50 N/m, στο άλλο άκρο του οποίου προσδένεται σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=1 Kg. Σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2=m_1$ συνδέεται με το $Σ_1$ με νήμα αβαρές και μη ελαστικό. Το σύστημα ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Απομακρύνουμε το σύστημα κατά d προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο οπότε εκτελεί Α.Α.Τ.



Α. Να υπολογίσετε το μέγιστο πλάτος A_{max} της ταλάντωσης του συστήματος, ώστε το νήμα να παραμένει τεντωμένο.

Β. Αν το όριο θραύσεως του νήματος είναι $T_{θρ}$=20 N και το σύστημα ταλαντώνεται με το πλάτος A_{max} που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα:

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα των σωμάτων του συστήματος την στιγμή που κόβεται το νήμα.

β) Αν η ταχύτα του σώματος $Σ_2$ αμέσως μετά την θραύση του νήματος είναι $u_2=3\sqrt{6}$ m/s, να προσδιορίσετε την εξίσωση

$x_1=f(t)$ της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα $Σ_1$. Να θεωρήσετε σαν χρονική στιγμή $t_0=0$ τη στιγμή που κόβετε το νήμα και θετική φορά προς τα κάτω.

γ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση και το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος $Σ_1$ όταν η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα έχουν την ελάχιστη τιμή τους.

Δίνεται: $g=10\ m/s^2$ και $π^2=10$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει ΑΑΤ με:

$D=k=(m_1+m_2)ω^2 \rightarrow$

$ω=\sqrt{\dfrac{k}{2m_1}}=\sqrt{25} \rightarrow ω=5$ rad/s και πλάτος A=d

Το $Σ_2$ κάνει ΑΑΤ με $D_2=m_2ω^2$ άρα: $ΣF=-D_2x \rightarrow m_2g-T_2=-D_2x \rightarrow$
$T_2=m_2g+m_2ω^2x$ (1)

Η T_2 θα γίνει ελάχιστη όταν x = -A δηλαδή $T_{2,min}=m_2g-m_2ω^2A$.
Για να παραμένει το νήμα τεντωμένο θα πρέπει:

$T_{2,min} \geq 0 \rightarrow m_2g-m_2ω^2A \geq 0 \rightarrow m_2g \geq m_2ω^2A \rightarrow A \leq \dfrac{g}{ω^2} \rightarrow$

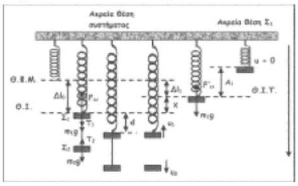
$A_{max}=\dfrac{10}{25}=0{,}4$ m.

Β.α) Το νήμα θα κοπεί όταν:

$T_2=T_{θρ} \xrightarrow{(1)} m_2g+m_2ω^2x=T_{θρ} \rightarrow 10+25x=20 \rightarrow 25x=10 \rightarrow$

x=10/25 m=0,4 m.

Δηλαδή όταν το σύστημα βρίσκεται στην ακραία θέση του άρα η ταχύτητα των σωμάτων είναι ίση με μηδέν.



β) Εφαρμόζουμε ΑΔΟ για τη θραύση του νήματος

$(\vec{ΣF}_{εξ}Δt \rightarrow 0)$:

$\vec{P}_{αρχ}=\vec{P}_{τελ} \rightarrow 0=-m_1u_1+m_2u_2 \rightarrow u_1=u_2 \rightarrow u_1=u_2=3\sqrt{6}$ m/s.

Μετά τη θραύση του νήματος το $Σ_1$ εκτελεί Α.Α.Τ. γύρω απο μια θέση ισορροπίας (Θ.Ι.Τ.) η οποία απέχει από την αρχική θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) κατά:

$x=Δl_0-Δl_1$ **(1)**.

Εφαρμόζοντας συνθήκες ισορροπίας στην αρχική (ΘΙ) και στην νέα θέση ισορροπίας (ΘΙΤ) παίρνουμε:

$ΣF=0 \rightarrow F_{ελ}=(m_1+m_2)g \rightarrow kΔl_0=(m_1+m_2)g \rightarrow$

$Δl_0=\dfrac{2m_1g}{k}=0{,}4$ m

$ΣF=0 \rightarrow F'_{ελ}=m_1g \rightarrow kΔl_0=m_1g \rightarrow Δl_1=\dfrac{m_1g}{k}=0{,}2$ m.

$(1) \rightarrow x=0{,}4-0{,}2 \rightarrow x=0{,}2$ m

Το σύστημα ελατηριου - σώματος $Σ_1$ είναι απλός αρμονικός ταλαντωτής, άρα:

$D_1=k \rightarrow m_1ω_1^2=k \rightarrow ω_1=\sqrt{\dfrac{k}{m_1}} \rightarrow ω_1=5\sqrt{2}$ rad/s

Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για την Α.Α.Τ. που εκτελεί το σώμα $Σ_1$ είναι:

$x_1=A_1ημ(ω_1t+φ_0)$ **(2)**

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ΑΑΤ του σώματος $Σ_1$ ανάμεσα στη θέση που κόβεται το νήμα και την ακραία θέση της ταλάντωσης του, έχουμε:

$K+U=E_{ολ} \rightarrow \dfrac{1}{2}m_1u_1^2+\dfrac{1}{2}k(x+d)^2=\dfrac{1}{2}kA_1^2 \rightarrow$

$\rightarrow 54+50\dfrac{36}{100}=50A_1^2 \rightarrow A_1^2=\dfrac{72}{50}=\dfrac{144}{100} \rightarrow A_1=1{,}2$ m.

Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$ είναι x=d+x=0,6 m και η ταχύτητα του $u_1<0$ άρα, έχει αρχική φάση $φ_0$ η οποία υπολογίζεται ως εξής:

Θετουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης $t_0=0$ και x=0,6m.
Έτσι η εξίσωση $0{,}6=1{,}2\,ημ(ω\,0+φ_0) \rightarrow 0{,}6=1{,}2\,ημφ_0 \rightarrow$

$\rightarrow ημφ_0=\dfrac{1}{2}=ημ\dfrac{π}{6}$

Γράφουμε τις λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης:
$φ_0=2κπ+π/6$ **(3)** ή $φ_0=2κπ+π-π/6=2κπ+5π/6$ $(κ \in Z)$ **(4)**

με $0 \leq φ_0 < 2π$

Για κ=0: $(3) \rightarrow φ_0=\dfrac{π}{6}$ rad. Επειδή $u=u_{max}συν\dfrac{π}{6}>0$ απορ

$(4) \rightarrow φ_0=\dfrac{5π}{6}$ rad. Επειδή $u=u_{max}συν\dfrac{5π}{6}<0$ δεκτή.

Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο γράφεται:

$(2) \rightarrow x_1=1{,}2\,ημ(5t+\dfrac{5π}{6})$ (S.I.)

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος $Σ_1$ δίνεται από τη σχέση: $Δp/Δt=ΣF=-Dx$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου $U_{ελ}=\dfrac{1}{2}KΔl^2$ έχει την ελάχιστη τιμή της όταν το ελατήριο βρίσκεται στη Θ.Φ.Μ. όπου Δl=0.

Η απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$ εκείνη τη στιγμή είναι:
$x_2=Δl_1=-0{,}1$ m άρα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του θα είναι:

$\dfrac{Δp}{Δt}=ΣF=-D\,x_1=-100(-0{,}1) \rightarrow \dfrac{Δp}{Δt}=10$ N.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης $U=\dfrac{1}{2}Dx^2$ έχει την ελάχιστη τιμή όταν το σώμα $Σ_1$ περνάει από τη θέση ισορροπίας του.

Η απομάκρυνση του εκείνη τη χρονική στιγμή είναι $x_2=0$, άρα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του θα είναι:

$\dfrac{Δp}{Δt}=ΣF=-D\,x_2=0 \rightarrow \dfrac{Δp}{Δt}=0$.

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ»
Α. ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ