ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2010
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

Θέμα 1ο:

Έστω

$f:[1, +\infty)\to R$ και $g:[1, +\infty)\to R$ παραγωγίσιμες στο

$[1, +\infty)$ και τέτοιες ώστε:

$$\int_1^x f(t)\,dt = x\cdot[f(x)-1] \quad (1),\quad g(x) = -1-\int_1^x [f(t)+e]\,dt \quad (2),$$

και $f(1)=-e$.

i) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f, g

ii) Να δειχθεί ότι οι γραφιές τους παραστάσεις τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο, με τετμημένη $\xi\in(1, e^2)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1Ο ΘΕΜΑ

i) Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, συνεπώς η

$\int_1^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη. Από **(1)** έχουμε:

$x\cdot f'(x)=1$ ή $f'(x) = \frac{1}{x}$ οπότε

$$\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = (x\cdot[f(x)-1])' \text{ ή } f(x)=f(x)-1+x\cdot f'(x) \text{ ή}$$

$$\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x}dt \text{ ή } f(x)=\ln x+c \quad (3)$$

Επειδή $f(1)=-e$ η (3) γίνεται $-e=c$ άρα $\underline{\mathbf{f(x)=\ln x-e}}$

Η **(2)** γράφεται

$$g(x)=-1-\int_1^x \ln t\,dt = -1-x\ln x+x+1 \text{ ή } \boxed{g(x)=-x\ln x+x}$$

ii) Έστω $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, $x\geq1$ οπότε $\varphi(x)=\ln x+x\ln x-x-e$, $x\geq1$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ άρα και συνεχής.

$\varphi(1)=-1-e<0$, $\varphi(e^2)=e^2-e+2=e(e-1)+2>0$.

Δηλαδή $\varphi(1)\cdot\varphi(e^2)<0$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(1, e^2)$: $\varphi(\xi)=0$ ή $f(\xi)=g(\xi)$ άρα οι C_f, C_g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Όμως $\varphi'(x)=\frac{1}{x}+\ln x>0$ για κάθε $x\geq1$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ συνεπώς η εξίσωση $\varphi(x)=0$, άρα και η $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική λύση. Δηλαδή οι C_f, C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

Θέμα 2ο:

Έστω F παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$F'(x)=\frac{(x-3)^2}{x}$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$ και $F(1)=0$.

α. Να βρεθεί ο τύπος της F.

β. Δείξτε ότι η C_F έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το οποίο και να βρεθεί.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2Ο ΘΕΜΑ

α. Για κάθε $x\in(0, +\infty)$ έχουμε:

$F'(x)=\frac{x^2-6x+9}{x}$ ή

$F'(x)=x-6+\frac{9}{x}$ ή

$F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}-6x+9\ln x\right)'$

Άρα $F(x)=\frac{1}{2}x^2-6x+9\ln x+C$, $C\in\mathbb{R}$

Αφού $F(1)=0$ τότε $C=\frac{11}{2}$

Επομένως: $F(x)=\frac{1}{2}x^2-6x+9\ln x+\frac{11}{2}$, $x\in(0, +\infty)$.

$$F''(x)=\left(x-6+\frac{9}{x}\right)'=1-\frac{9}{x^2}=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

β. Για κάθε $x\in(0, +\infty)$ έχουμε:

x	0		3		$+\infty$
F''(x)		−	0	+	
F(x)		$\frown$	ΣΚ	$\smile$	

Το πρόσημο της F'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.
Στο $x_o=3$ η F παρουσιάζει καμπή και το σημείο $M(3, 9\ln3-8)$ είναι το Σ.Κ. της C_F.

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ»
Α. ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2010
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

> ***1ο Θέμα:*** Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(x)=f(2-x)$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1Ο ΘΕΜΑ

Για κάθε $x\in\Re$ έχουμε :

$f'(x) = [f(2-x)]'$ ή

$f'(x) = f'(2-x)\cdot(2-x)'$ ή

$f'(x) = -f'(2-x)$

Για x=1 παίρνουμε:

$f'(1) = -f'(1) \Leftrightarrow f'(1) = 0.$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$ τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ και άρα η x=1 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$

- Για $x<1$ έχουμε $f'(x)< f'(1)$ δηλαδή $f'(x)<0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$

- Για $x>1$ έχουμε $f'(x)> f'(1)$ δηλαδή $f'(x)>0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

> ***2ο Θέμα:*** Δίνονται οι συναρτήσεις F, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $F(x)=x^2+2\kappa x+3\lambda$ και $g(x)\cdot[g(x)-4]-e^{2x}=$

$$=[g(x)-2]^2-2g(x)+\frac{x^4}{4}+\frac{\kappa x^3}{3}+\frac{\lambda x^2}{2} \quad (1)$$

Αν η C_F βρίσκεται πάνω από τον άξονα να μελετηθεί η g ως προς την κυρτότητα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2Ο ΘΕΜΑ

Αφού η C_F βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x τότε $F(x)>0$ για κάθε $x\in R$ δηλαδή:

$x^2+2\kappa x+3\lambda > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρέπει $\Delta<0$ δηλαδή $4\kappa^2-12\lambda<0$ ή $\kappa^2-3\lambda<0$ (2)

Από (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$[g(x)]^2-4g(x)-e^{2x}=[g(x)]^2-4g(x)+4-2g(x)+\frac{x^4}{4}+\frac{\kappa x^3}{3}+\frac{\lambda x^2}{2} \text{ ή}$$

$$2g(x)=e^{2x}+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}\kappa x^3+\frac{1}{2}\lambda x^2+4 \text{ ή}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{6}\kappa x^3+\frac{1}{4}\lambda x^2+2$$

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με:

$$g'(x)=e^{2x}+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}\kappa x^2+\frac{1}{2}\lambda x,\ x\in R$$

$$\text{και } g''(x)=2e^{2x}+\frac{3}{2}x^2+\kappa x+\frac{1}{2}\lambda,\ x\in R$$

$$= 2e^{2x}+\frac{1}{2}(3x^2+2\kappa x+\lambda)$$

Το τριώνυμο $3x^2+2\kappa x+\lambda$ έχει $\Delta_1=4\kappa^2-12\lambda<0$ λόγω (2) και άρα $3\kappa x^2+2\kappa x+\lambda>0$ για κάθε $x\in R$.
Αφού $g''(x)>0$ για κάθε $x\in R$, τότε η g στρέφει τα κοίλα της προς τα άνω στο R.

> ***3ο Θέμα:*** Δίνεται η εξίσωση $x^6+(1-x)^6=\frac{1}{\lambda+2}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ κ αι $\lambda\neq-2$

Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 3Ο ΘΕΜΑ

Έστω $F(x)=x^6+(1-x)^6-\frac{1}{\lambda+2},\ x\in R$

Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με
$F'(x)=6x^5-6(1-x)^5$
Έχουμε $F'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^5-6(1-x)^5=0 \Leftrightarrow x^5=(1-x)^5 \Leftrightarrow x=1-x \Leftrightarrow x=1/2$
Το πρόσημο της F', η μονοτονία και τα ακρότατα της F φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
F'(x)		−	0	+	
F(x)	$+\infty$	↘	Min	↗	$+\infty$

- $F'(0)=-6<0$ οπότε $F'(x)<0$ για κάθε $x<1/2$

- $F'(1)=6>0$ οπότε $F'(x)>0$ για κάθε $x>1/2$

Η F για $x=\frac{1}{2}$ παρουσιάζει ελάχιστο το

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{32}-\frac{1}{\lambda+2}$$

και το σύνολο τιμών της είναι το

$$F(R)=\left[\frac{\lambda-30}{32(\lambda+2)},+\infty\right)$$

Για να μην έχει η εξίσωση $F(x)=0$ πραγματικές ρίζε

$$\text{πρέπει } \frac{\lambda-30}{32(\lambda+2)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda-30)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda<-2 \text{ ή } \lambda>30$$

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ»
Α. ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ