ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Φυσική Κατεύθυνσης

Μια σημαντική κατηγορία συνδυαστικών ασκήσεων είναι αυτές που αφορούν την απλή αρμονική ταλάντωση (ΑΑΤ) κατά την διάρκεια της οποίας έχουμε κρούση.

Στα προβλήματα αυτά **μας ενδιαφέρει η θέση ισορροπίας του σώματος που κάνει ΑΑΤ πριν και μετά την κρούση**.
Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις, ανάλογα με **το είδος της κρούσης** (ελαστική, ανελαστική ή πλαστική) και **τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου**.

- Όταν ο άξονας του ελατηρίου είναι οριζόντιος, σε κάθε κρούση **η θέση ισορροπίας δεν αλλάζει** πριν και μετά την κρούση.
- Όταν ο άξονας του ελατηρίου είναι κατακόρυφος ή πλάγιος (σε κεκλιμένο επίπεδο), η θέση ισορροπίας αλλάζει όταν μεταβάλλεται η μάζα του ταλαντωτή π.χ. στην πλαστική κρούση.

Τα βήματα που ακολουθούμε για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα στο οποίο έχουμε κρούση είναι:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε **τις ταχύτητες των σωμάτων του συστήματος λίγο πριν την κρούση** εφαρμόζοντας **ΘΜΚΕ ή ΑΔΜΕ** (αν δίνονται οι μετατοπίσεις των σωμάτων) **ή ΑΔΕΤ** (αν το σώμα είναι απλός αρμονικός ταλαντωτής) **ή εξισώσεις κίνησης** (αν δίνονται οι χρόνοι κίνησης των σωμάτων).
Βήμα 2: Υπολογίζουμε **τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση**, εφαρμόζοντας την **αρχή διατήρησης της ορμής** του συστήματος αν η κρούση είναι ανελαστική (ή πλαστική).
Αν η κρούση **είναι μετωπική ελαστική** τότε οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_1=\frac{2m_2}{m_1+m_2}u_2+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \text{ και}$$

$$V_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}u_2$$

όπου, οι σχέσεις έχουν αποδειχθεί για **θετική φορά** των ταχυτήτων u_1 και u_2 πριν την κρούση.

Βήμα 3: Όταν το σύστημα αλλάζει θέση ισορροπίας μετά την κρούση υπολογίζουμε την **απόσταση της αρχικής θέσης ισορροπίας ως προς τη νέα θέση ισορροπίας ταλάντωσης** εργαζόμενοι ως εξής:
Εφαρμόζουμε συνθήκες ισορροπίας

$$(\Sigma\vec{F}=0),$$

τόσο στην αρχική θέση όσο και στην τελική θέση ισορροπίας ταλάντωσης και από τις σχέσεις που προκύπτουν βρίσκουμε την απόσταση αρχικής - νέας θέσης ισορροπίας.
Βήμα 4: Για τα σώματα (ή το σώμα) που προκύπτουν μετά από την κρούση εφαρμόζουμε:
- **αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης (ΑΔΕΤ)** (αν το σώμα είναι απλός αρμονικός ταλαντωτής) **από τη θέση κρούσης έως την ακραία θέση**, αφού λάβουμε υπόψη μας ότι **το σύστημα ως προς τη νέα θέση ισορροπίας (αν αλλάζει η θέση ισορροπίας ταλάντωσης) έχει τόσο δυναμική όσο και κινητική ενέργεια**.

Προσοχή!!! όταν **η κρούση είναι ελαστική τότε μετά την κρούση δεν μεταβάλλεται η περίοδος** του ταλαντωτή, ενώ **όταν είναι πλαστική μεταβάλλεται η μάζα του ταλαντωτή άρα και η περίοδος του αφού αυτή δίνεται από τη σχέση**:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

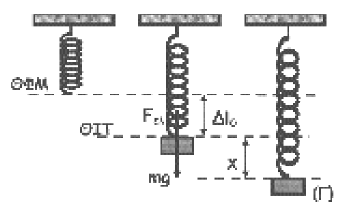
- ΘΜΚΕ ή ΑΔΜΕ (αν δίνονται ή ζητούνται οι μετατοπίσεις των σωμάτων).
- **Εξισώσεις κίνησης** (αν δίνονται ή ζητούνται οι χρόνοι κίνησης των σωμάτων).

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δείξουμε στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν το σώμα που ταλαντώνεται πριν ή μετά από την κρούση είναι απλός αρμονικός ταλαντωτής (δηλαδή ένα σώμα μάζας m προσαρμοσμένο στο ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο και κινείται **χωρίς τριβές**) τότε αποδεικνύεται ότι **ανεξάρτητα από τη διεύθυνση** του άξονα του ελατηρίου το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με σταθερά $\mathbf{D=k=m\,\omega^2}$ = σταθ. και **περίοδο**

$$\mathbf{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

2. Αν δίνεται η αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου Δl_0 (απόσταση της ΘΙΤ από τη ΘΦΜ) μπορούμε να υπολογίσουμε την κυκλική συχνότητα ω (άρα και την περίοδο Τ) της ταλάντωσης. Πράγματι είναι:



$$\Sigma F=0\rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=m\,g\rightarrow k\,\Delta l_0=m\,g\rightarrow$$

$$m\,\omega^2\Delta l_0=m\,g\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{\Delta l_0}}$$

3. Η ΘΦΜ και η ΘΙΤ συμπίπτουν μόνο όταν ο άξονας του ελατηρίου είναι οριζόντιος και σε μια καμία άλλη περίπτωση.
Άρα η **δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δεν ταυτίζεται με τη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου,** σε σχέση με το φυσικό του μήκος, παρά μόνο αν ο άξονας του ελατηρίου είναι οριζόντιος.
4. Το διάστημα S που διανύει ο ταλαντωτής **σε μια περίοδο** (δηλαδή όταν κάνει μια ταλάντωση), υπολογίζεται από τη σχέση: **S=4 A**. Η απόσταση d που διανύει ο ταλαντωτής σε κάποιο χρονικό διάστημα Δt, το οποίο είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου, υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d}{4A}=\frac{\Delta t}{T}\rightarrow d=\frac{\Delta t}{T}\,4A$$

5. Όταν ένα σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του κατά x και στη συνέχεια **αφήνεται ελεύθερο (u=0)**, ώστε να εκτελέσει Α.Α.Τ., **τότε η θέση από την οποία αφήνεται είναι ακραία θέση για την ταλάντωση άρα το x είναι ταυτόχρονα και το πλάτος Α της ταλάντωσης δηλ. x=A.**
6. Όταν ένα σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του κατά x και στη συνέχεια **βάλλεται από τη θέση αυτή με ταχύτητα u**, ώστε να εκτελέσει Α.Α.Τ., **το πλάτος Α της ταλάντωσης υπολογίζεται με ΑΔΕΤ από τη θέση αυτή ως την ακραία θέση**.
7. Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και αποκτά ταχύτητα u, ώστε να εκτελέσει Α.Α.Τ., **τότε το u είναι ταυτόχρονα και η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης δηλ.** $\mathbf{u=u_{max}=\omega\,A}$.
8. Όταν σ' ένα σώμα προσφέρουμε ενέργεια W=E, ώστε να εκτελέσει Α.Α.Τ., η ολική ενέργεια της ταλάντωσης $E_{\tau\alpha\lambda}$ είναι ίση με την ενέργεια που προσφέραμε εστο σύστημα. Δηλ.:

$$E_{\tau\alpha\lambda}=W=\frac{1}{2}D\,A^2$$

9. Αν ζητείται η τιμή ενός μεγέθους της Α.Α.Τ. **μια ορισμένη χρονική στιγμή t_1** γράφουμε **την αντίστοιχη εξίσωση του μεγέθους σε συνάρτηση με το χρόνο** και αντικαθιστώντας την χρονική στιγμή t_1 που μας δίνεται υπολογίζουμε την τιμή του μεγέθους.
10. Αν ζητείται η τιμή ενός μεγέθους Α.Α.Τ. **και δεν δίνεται η χρονική στιγμή, θα εφαρμόζουμε πάντα ΑΔΕΤ**.
11. Όταν ζητείται η χρονική στιγμή t_1 στην οποία η απομάκρυνση (ή η ταχύτητα ή η επιτάχυνση) έχει ορισμένη τιμή(π.χ. $x=x_1$), τότε εργαζόμαστε ως εξής:
- Υπολογίζουμε την αρχική φάση φ_0, αν υπάρχει.
- Γράφουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης x (ή της ταχύτητας ή της επιτάχυνσης) και αντικαθιστούμε στη θέση του x το x_1 και στη θέση του t το t_1. Στη συνέχεια λύνουμε ως προς το ημίτονο.
12. Όταν ζητείται **το χρονικό διάστημα Δt που χρειάζεται ένα ταλαντούμενο σώμα για να κινηθεί από ένα σημείο $\mathbf{B(x=x_1)}$ της τροχιάς του σε ένα άλλο σημείο $\mathbf{\Gamma(x=x_2)}$**, τότε υπολογίζουμε τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το ταλαντούμενο σώμα για να μεταβεί από τη θέση Β στην θέση Γ είναι:

$$\Delta t=t_2-t_1.$$

Προσοχή ***Αν η αρχική και η τελική θέση είναι η ΘΙΤ ή ακραίες θέσεις, τότε ο χρόνος μετάβασης από τη μια θέση στην άλλη είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του Τ/4.***

ΗΜΕΛΛΟΣ Μ. - ΠΟΘΗΤΑΚΗΣ Β.

ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Θέματα Φυσικής Κατεύθυνσης

Για τα τρέχοντα μηχανικά κύματα πρέπει να έχουμε υπόψιν μας τα εξής:

1. Υπάρχει διαφορά μεταξύ της ταχύτητας διάδοσης ενός κύματος και της ταχύτητας με την οποία ταλαντώνονται τα σωματίδια του μέσου όπου διαδίδεται το κύμα.
Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, όταν το μέσο είναι ομογενές και ισότροπο, είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το χρόνο, ενώ η ταχύτητα με την οποία ταλαντώνονται τα σωματίδια του μέσου είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου:

$$V=\omega\ A\ \text{συν}\ 2\pi\left(\frac{t}{T}\pm\frac{X}{\lambda}\right)$$

2. Η συχνότητα ενός αρμονικού κύματος καθορίζεται αποκλειστικά από την πηγή του κύματος και κατά την διάδοση του κύματος παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από την ταχύτητα διάδοσης, η οποία καθορίζεται από το μέσο που διαδίδεται το κύμα.

- Όταν λοιπόν, ένα κύμα μεταβαίνει από ένα μέσο Α (όπου έχει ταχύτητα u_A) σε ένα διαφορετικό μέσο Β (όπου έχει ταχύτητα u_B), τότε το μήκος κύματος του κύματος θα είναι ανάλογο με την ταχύτητα διάδοσης.

- Όταν ένα κύμα διαδίδεται στο ίδιο μέσο η ταχύτητα διάδοσης u παραμένει σταθερή οπότε το μήκος κύματος του κύματος θα είναι αντιστρόφως ανάλογο με την συχνότητα.

3. Για να βρούμε τη χρονική στιγμή t_Σ που το κύμα φτάνει σ' ένα σημείο Σ του ελαστικού μέσου, μηδενίζουμε τη φάση της ταλάντωσης του σημείου, δηλαδή:

$$\varphi_\Sigma=2\pi\left(\frac{t_\Sigma}{T}-\frac{X_\Sigma}{\lambda}\right)=0\rightarrow\left(\frac{t}{T}-\frac{X_\Sigma}{\lambda}\right)=0\rightarrow$$

$$\frac{t_\Sigma}{T}=\frac{X_\Sigma}{u\ T}\rightarrow t_\Sigma=\frac{X_\Sigma}{u}.$$

4. 'Οταν ζητείται η απομάκρυνση ή η ταχύτητα ή η επιτάχυνση της ΑΑΤ ενός σημείου Σ του ελαστικού μέσου μια χρονική στιγμή t_1, βρίσκουμε τη φάση του σημείου την παραπάνω χρονική στιγμή από τη σχέση :

$$\varphi_\Sigma=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X_\Sigma}{\lambda}\right).$$

- Αν $\varphi_\Sigma < 0$ το σημείο δεν έχει αρχίσει την ταλάντωση του, δηλαδή είναι ακίνητο, άρα ψ=0, u=0, α=0.

- Αν $\varphi_\Sigma \geq 0$ το σημείο θα ταλαντώνεται, οπότε

υπολογίζουμε την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του από τις αντίστοιχες εξισώσεις.

5. Όταν ζητείται η τιμή ενός μεγέθους της ΑΑΤ ενός σημείου Σ του ελαστικού μέσου και δεν δίνεται η χρονική στιγμή, θα εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ.

6. Το κύμα διαδίδεται πάντα από τα σημεία με τη μεγαλύτερη φάση προς τα σημεία με τη μικρότερη φάση.

7. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων του ελαστικού μέσου την ίδια χρονική στιγμή είναι:

$$\Delta_\varphi=\varphi_K-\varphi_M=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X_K}{\lambda}\right)-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X_M}{\lambda}\right)\rightarrow$$

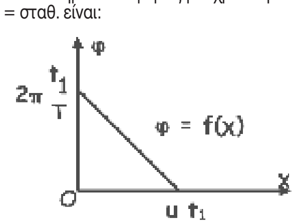
$$\Delta_\varphi=2\pi\frac{\Delta X}{\lambda}$$

8. Η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2 είναι:

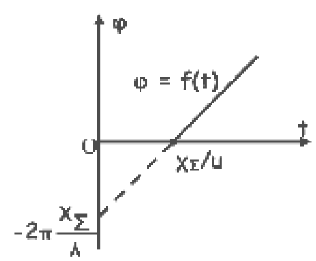
$$\varphi_2-\varphi_1=2\pi\left(\frac{t_2}{T}-\frac{X}{\lambda}\right)-2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{X}{\lambda}\right)\rightarrow$$

$$\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi=2\pi\frac{\Delta t}{T}$$

9. Το διάγραμμα της φάσης των σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα σε συνάρτηση με την απόσταση x από το σημείο αναφοράς μια χρονική στιγμή t_1 = σταθ. είναι:



10. Το διάγραμμα της φάσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου (X_Σ = σταθερό) σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:



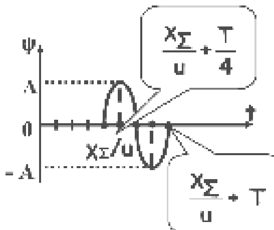
11. Για να κατασκευάσουμε το διάγραμμα της απομάκρυνσης από την ΘΙΤ σε συνάρτηση με το χρόνο, της ΑΑΤ ενός σημείου Σ του ελαστικού μέσου το οποίο απέχει X_Σ από το σημείο αναφοράς :

- Βρίσκουμε πρώτα τη χρονική στιγμή t_Σ που το κύμα φτάνει στο δεδομένο σημείο μηδενίζοντας τη φάση της ταλάντωσης του σημείου.

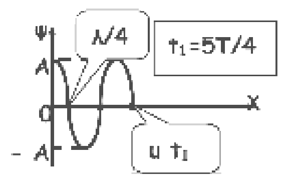
- Σχηματίζουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο για την ΑΑΤ του δεδομένου σημείου Σ:

$$\psi=A\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X_\Sigma}{\lambda}\right)\ \text{με}\ t\geq t_\Sigma=\frac{X_\Sigma}{u}.$$

- Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάγραμμα ψ=f(t) όταν X_Σ= σταθερό.



12. Για να κατασκευάσουμε το στιγμιότυπο [ψ=f(x) όταν t_1= σταθ.] ενός αρμονικού κύματος εργαζόμαστε ως εξής:



-Βρίσκουμε το σημαίο Σ του ελαστικού μέσου στο οποίο έχει φθάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 που μας ζητούν το στιγμιότυπο μηδενίζοντας τη φάση της ταλάντωσης του σημείου.

-Σχηματίζουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης των σημείων του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας τους, τη χρονική στιγμή t_1, σε συνάρτηση με την απόσταση x των σημείων αυτών από το σημείο αναφοράς:

$$\psi=A\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T}-\frac{X_\Sigma}{\lambda}\right)\rightarrow\psi=A\ \eta\mu 2\pi\left(\alpha-\frac{X_\Sigma}{\lambda}\right)$$

όπου $\alpha=t_1/T$= σταθερό
- Δίνουμε στο x τις τιμές , λ/4, λ/2, 3λ/4 ...., X_Σ = u t_1, και κατασκευάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Το σημείο Σ στη θέση X_Σ =u t_1 πρέπει να βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του αφού το κύμα (ενέργεια) μόλις φθάνει σ' αυτό οπότε μόλις ξεκινάει την ταλάντωσή του, ενώ το σημείο που βρίσκεται σε απόσταση λ/4 πριν από το Σ θα βρίσκεται σε ακραία θέση +Α αφού ταλαντώνεται ήδη για χρόνο T/4.

ΗΜΕΛΛΟΣ Μ - ΠΟΘΗΤΑΚΗΣ Ε.

ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Θέματα Φυσικής Κατεύθυνσης

Για τις φθίνουσες και τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις πρέπει να έχουμε υπόψιν μας τα εξής:

ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Αν η δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση και προκαλεί τις απώλειες ενέργειας είναι της μορφής: $F_{αντ}= - b\,u$, όπου b η σταθερά απόσβεσης (μονάδα Kg/s) και u η ταχύτητα του ταλαντωτή, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. Το πλάτος της μηχανικής ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.
$A_κ=A_0\, e^{-Λt}$,
όπου $t=κ\,T$, (κ=0, 1, ...) και $Λ=b/2m$ (s^{-1})

2. Ο χρόνος υποδιαπλασιασμού (ή χρόνος ημιζωής) $t_{1/2}$ του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης, δηλαδή το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να ελαττωθεί το πλάτος, από μια αρχική τιμή, στο μισό της είναι σταθερός και ίσος με:

$$A_κ=A_0\, e^{-Λt}\rightarrow\frac{A_0}{2}=A_0\, e^{-Λt1/2}\rightarrow e^{-Λt1/2}=\frac{1}{2}\rightarrow$$

$$-Λ\,t_{1/2}=\ln\frac{1}{2}\rightarrow -Λ\,t_{1/2}= -\ln2\rightarrow t_{1/2}=\frac{\ln2}{Λ}=σταθ.$$

3. Ο λόγος των διαδοχικών πλατών στην ίδια κατεύθυνση, είναι σταθερός.

$$\frac{A_κ}{A_{κ+1}}=\frac{A_0\, e^{-ΛκT}}{A_0\, e^{-Λ(κ+1)T}}=e^{-Λ\,κT+Λ(κ+1)T}=$$

$$=e^{-Λ\,κT+Λ\,κT+ΛT}\rightarrow\frac{A_κ}{A_{κ+1}}=e^{ΛT}=σταθ.(κ=0,1,...)$$

4. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο ταλαντούμενο σύστημα είναι:

$$ΣF=m\,α\rightarrow F_{επ}+F_{αντ}=m\,α\rightarrow -D\,x-b\,u=m\,α$$

5. Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του συστήματος συναρτήσει του χρόνου είναι:
$x=A_0\, e^{-Λt}\, ημ(ωt + φ_0)=A_κ\, ημ\,(ωt +φ_0)$

6. Η συχνότητα και η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι περίπου ίσες με τη ιδιοσυχνότητα f_0 και την ιδιοπερίοδο T_0 του ταλαντούμενου συστήματος και παραμένουν σταθερές για ορισμένη τιμή της σταθεράς απόσβεσης b.

$$f\cong f_0=\frac{1}{2π}\sqrt{\frac{D}{m}} \text{ και } T\cong T_0=2π\sqrt{\frac{m}{D}}$$

__**Παρατήρηση:**__ Στην πράξη η συχνότητα f της φθίνουσας ταλάντωσης δεν είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντούμενου συστήματος και δίνεται από τη σχέση:

$$f=\frac{1}{2π}\sqrt{\frac{D}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}=\frac{1}{2π}\sqrt{ω_0^2-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι όταν αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης b η συχνότητα παρουσιάζει μια μικρή μείωση άρα η περίδος μια μικρή αύξηση.

7. Η ενέργεια της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

$$E_κ=\frac{1}{2}D\, A_κ^2 \text{ ή } E_κ=\frac{1}{2}D\, A_0^2\, e^{-2Λt} \text{ ή } E_κ=E_0 e^{-2Λt}$$

όπου $t= κ\,T$, (κ=0, 1, ...) και $Λ= b/2m$

8. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού (η χρόνος ημιζωής) $t_{1/2}$ της ενέργειας της φθίνουσας ταλάντωσης, δηλαδή το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να ελαττωθεί η ενέργεια, από μια αρχική τιμή, στο μισό της είναι σταθερός και ίσος με:

$$E_κ=E_0\, e^{-2Λt}\rightarrow\frac{E_0}{2}=E_0\, e^{-2Λt_{1//2}}\rightarrow e^{-2Λt_{1//2}}=\frac{1}{2}\rightarrow$$

$$\rightarrow -2Λ\,t_{1/2}=\ln\frac{1}{2}\rightarrow -2Λ\,t_{1/2}= -\ln2\rightarrow$$

$$\rightarrow t_{1/2}=\frac{\ln2}{2Λ}=σταθ.$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος υποδιπλασιασμού της ενέργειας είναι ο μισός από το χρόνο υποδιπλασιασμού του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης.

9. Ο λόγος των διαδοχικών μεγίστων ενεργειών είναι σταθερός.

$$\frac{E_κ}{E_{κ+1}}=\frac{E_0\, e^{-2\,Λ\,κT}}{E_0\, e^{-2\,Λ(κ+1)T}}=e^{-2\,ΛκT+2Λ(κ+1)T}=$$

$$=e^{-2Λ\,κT+2Λ\,κT+2ΛT}=e^{2ΛT}\rightarrow\frac{E_κ}{E_{κ+1}}=$$

$$=e^{2\,ΛT}=σταθ.\ (κ=0,\ 1,\ ...)$$

10. Η θερμότητα Q που παράγεται σε μια φθίνουσα ταλάντωση είναι ίση με το έργο της δύναμης $F_{αντ}$ που αντιστέκεται στην κίνηση και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q=|W_{F_{αντ}}|=E_{αρχ}-E_{τελ}=\frac{1}{2}D\ A_{αρχ}^2-\frac{1}{2}D\ A_{τελ}^2$$

11. Η συνολική θερμότητα $Q_{ολ}$ που παράγεται σε μια φθίνουσα ταλάντωση, δηλαδή η θερμότητα που παράγεται μέχρι να σταματήσει ο ταλαντωτής είναι:

$$Q_{ολ}=E_{αρχ}-E_{τελ}=\frac{1}{2}D\ A_0^2-0=E_0$$

όπου E_0 η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης.

12. Σε μια φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση που γίνεται σε ένα πραγματικό (μη ιδανικό) κύκλωμα LC:

- Στην σταθερά απόσβεσης b αντιστοιχεί η ωμική αντίσταση R του κυκλώματος.

- Η συχνότητα και η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι περίπου ίσες με την ιδιοσυχνότητα f_0 και την ιδιοπερίοδο T_0 του ταλαντούμενου συστήματος και παραμένουν σταθερές για ορισμένη τιμή της αντίστασης R.

$$f\cong f_0=\frac{1}{2π\sqrt{LC}} \text{ και } T\cong T_0=2π\sqrt{LC}$$

- Το μέγιστο φορτίο της ηλεκτρικής ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$Q_κ=Q_0\, e^{-Λt}$, όπου $t=κ\,T$, (κ=0, 1, ...)

και $Λ=\frac{R}{2L}$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Εξαναγκεσμένη ονομάζουμε την ταλάντωση στην οποία προσφέρουμε ανά περίοδο την ενέργεια που χάνει ο ταλαντωτής, μέσω του έργου μιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης (διεγείρουσα δύναμη). Για την εξαναγκασμένη ταλάντωση ισχύουν τα παρακάτω:

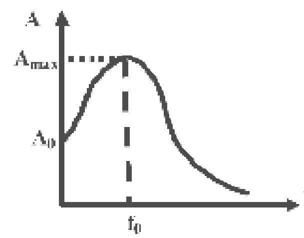
1. Το πλάτος της ταλάντωσης μένει σταθερό. A=σταθ.

2. Η περίοδος και η συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με την περίοδο και την συχνότητα του διεγέρτη και όχι με την ιδιοπερίοδο και την ιδιοσχυνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης.
Αν $F_{διεγ}=F_{max}\, ημωt$ η εξωτερική περιοδική (διεγείρουσα) δύναμη τότε η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με την κυκλική συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης και όχι με την κυκλική ιδιοσυχνότητα $ω_0$ του συστήματος.

3. Συνισταμένη των δυνάμεων:
$ΣF=m\,α\rightarrow F_{διεγ}+F_{επ}+F_{αντ}=m\,α\rightarrow$
$F_{max}\, ημωt-D\,χ-b\,u=m\,α\rightarrow$
$F_{max}\, ημωt-m\,ω^2_0\,χ-b\,u=-m\,ω^2\,χ$

4. Η ενέργεια της ταλάντωσης παραμένει σταθερή:
$E=\frac{1}{2}D\,A^2=$ σταθ.

5. Συντονισμός είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η συχνότητα f διεγέρτη είναι περίπου ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος και το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο.



6. Στιγμιαίοι ρυθμοί ενέργειας

- Ρυθμός με τον οποίο ο διεγέρτης προσφέρει ενέργεια στο σύστημα:

$$P_{Fεξ}=\frac{dW_{Fεξ}}{dt}=\frac{F_{εξ}dx}{dt}=F_{εξ}\, u_{στιγμιαία}$$

- Ο ρυθμός με τον οποίο το σύστημα απορροφά ενέργεια από τον διεγέρτη είναι ίσος, κατ' απόλυτη τιμή, με το ρυθμό μετατροπής της ενέργειας της ταλάντωσης σε θερμότητα, λόγο της $F_{αντ}= -b\,u$ δηλαδή:

$$P_{απορ}=\frac{dW_{απορ}}{dt}=\left|\frac{dW_{Fαντ}}{dt}\right|=$$

$$=|F_{αντ}|\, u_{στιγμιαία}=b\, u^2_{στιγμιαία}$$

- Ο ρυθμός με τον οποίο το σύστημα απορροφά ενέργεια από το διεγέρτη γίνεται ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο ο διεγέρτης προσφέρει ενέργεια στο σύστημα ΜΟΝΟ όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Πράγματι στην κατάσταση συντονισμού ισχύει $ω=ω_0$ οπότε:

$$F_{εξ}+F_{επ}+F_{αντ}=m\,α\rightarrow F_{εξ}-m\,ω_0^2\,x+F_{αντ}=$$

$$= -m\,ω^2\,x\rightarrow F_{εξ}+F_{αντ}=0\rightarrow F_{εξ}= -F_{αντ}=b\,u$$

$$\text{άρα } P_{Fεξ}=\frac{dW_{Fεξ}}{dt}=F_{εξ}\, u_{στιγμιαία}=$$

$$=b\, u^2_{στιγμιαία}=P_{απορ}$$

ΗΜΕΛΛΟΣ Μ. - ΠΟΘΗΤΑΚΗΣ Β.