ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

ΠΩΣ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΕΤΕ ΕΥΚΟΛΑ ΤΗ ΔΙΑΜΕΣΟ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1η: Αν οι παρατηρήσεις είναι λίγες, τις τοποθετούμε πρώτα με αύξουσα σειρά. Διάμεσος ορίζεται η μεσαία παρατήρηση αν το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός ή το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, αν το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός.

Παράδειγμα:

x_i: 2, 3, **5**, 8, 10 $\qquad δ=5$

x_i: 2, 3, 5, 8, 10, 20 $\qquad δ=\frac{5+8}{2}=6{,}5$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2η: Αν δοθεί κατανομή συχνοτήτων (x_i, v_i) και οι συχνότητες v_i είναι λίγες, γράφουμε πρώτα αναλυτικά τις τιμές της μεταβλητής x_i τις τοποθετούμε με αύξουσα σειρά και υπολογίζουμε τη διάμεσο όπως προηγουμένως.

Παράδειγμα:

x_i:	1	2	3	4
v_i:	3	2	1	2

x_i: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 $\qquad δ=\frac{2+2}{2}=2$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3η: Αν δοθεί κατανομή συχνοτήτων (x_i, v_i) και οι συχνότητες v_i είναι πολλές η προηγούμενη μέθοδος δεν συνίσταται. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε τη διάμεσο αφού πρώτα υπολογίσουμε τις αθροιστικές συχνότητες N_i και εργαστούμε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Παράδειγμα:

x_i	1	2	3	4	5	6
v_i	5	15	25	10	15	20
N_i	5	20	45	55	70	90

v=90

Η διάμεσος βρίσκεται στη θέση

$$\frac{v+1}{2}=\frac{90+1}{2}=45{,}5$$

$$δ=\frac{45^η \text{παρατήρηση}+46^η \text{παρατήρηση}}{2}=$$

$$=\frac{3+4}{2}=3{,}5$$

(Όλες οι παρατηρήσεις από την $46^η$ έως και την $55^η$ αντιστοιχούν στο x=4)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4η: Αν δοθεί κατανομή σχετικών συχνοτήτων $(x_i, f_i\%)$ η διάμεσος βρίσκεται αφού πρώτα υπολογίσουμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i\%$ και εργαστούμε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί:

x_i	1	2	3	4	5	6
$f_i\%$	10	25	20	30	5	10
$F_i\%$	10	35	55	85	90	100

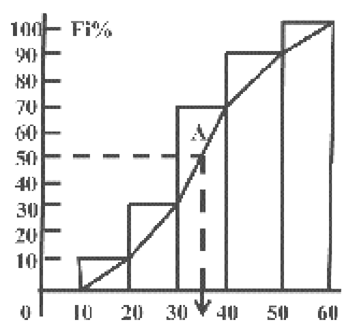
Η διάμεσος (δ) αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων. Τα ποσοστά των παρατηρήσεων μετά το 35% και μέχρι το 55% αντιστοιχούν στο x=3. Άρα δ=3 αφού το 50% αντιστοιχεί στην τιμή x=3.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5η: Αν οι παρατηρήσεις είναι ομαδοποιημένες σε κλάσεις, η διάμεσος

βρίσκεται (με διάγραμμα), από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ή (κατ' επέκταση) από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

[-)	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$	N_i
10-20	5	10	10	5
20-30	10	20	30	15
30-40	20	40	70	35
40-50	10	20	90	45
50-60	5	10	100	50
		100		

Από το σημείο που αντιστοιχεί στο 50% του κατακόρυφου άξονα φέρνουμε παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσει το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων σε ένα σημείο Α. Η προβολή του σημείου τομής στον οριζόντιο άξονα, προσδιορίζει τη διάμεσο.



δ=35

Παρατήρηση 1η: Αν έχουμε πολύγωνο αθροιστηκών συχνοτήτων, φέρνουμε παράλληλη από το σημείο v/2 (δηλαδή το 50% των παρατηρήσεων).

Παρατήρηση 2η: Η διάμεσος μπορεί να υπολογιστεί και με τη βοήθεια ομοίων τριγώνων. Η μέθοδος όμως αυτή δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο και καλό είναι να αποφεύγεται.

ΤΥΠΟΙ ΣΤΗΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

ΚΥΡΙΟΙ ΤΥΠΟΙ:

1) $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(t_i-\bar{x})^2$

2) $S^2=\frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{v}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{v}t_i\right)^2}{v}\right]$

3) $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{κ}(x_i-\bar{x})^2 v_i$

4) $S^2=\frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i\right)^2}{v}\right]$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΤΥΠΟΙ

(Προκύπτουν από τους κυρίους τύπους και χρειάζεται απόδειξη για να χρησιμοποιηθούν). Προτείνεται η εφαρμογή τους αν τα δεδομένα της εκφώνησης δεν βοηθούν στη λύση μιας άσκησης με τους γνωστούς τύπους.

1) $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(t_i-\bar{x})^2=\frac{\sum_{i=1}^{v}(t_i^2-2\bar{x}t_i+\bar{x})^2}{v}=$

$=\frac{\sum_{i=1}^{v}t_i^2}{v}-2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{v}t_i}{v}+\frac{v\bar{x}^2}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v}t_i^2}{v}-\bar{x}^2$

2) $S^2=\frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{v}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{v}t_i\right)^2}{v}\right]=\frac{\sum_{i=1}^{v}t_i^2}{v}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{v}t_i}{v}\right)^2=$

$=\frac{\sum_{i=1}^{v}t_i^2}{v}-\bar{x}^2$

3) $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{κ}(x_i-\bar{x})^2 v_i=\frac{\sum_{i=1}^{κ}(x_i^2 v_i-2\bar{x}v_i x_i+\bar{x}^2 v_i)}{v}=$

$=\frac{\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i^2}{v}-2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i}{v}+\frac{\bar{x}^2\sum_{i=1}^{κ}v_i}{v}=$

$=\frac{\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i^2}{v}-2\bar{x}^2+\bar{x}^2\frac{v}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i^2}{v}-\bar{x}^2$

4) $S^2=\frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i\right)^2}{v}\right]=$

$=\frac{\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i^2}{v}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i}{v}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i^2}{v}-\bar{x}^2$

5) $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{κ}(x_i-\bar{x})^2 v_i=\sum_{i=1}^{κ}(x_i-\bar{x}^2)\frac{v_i}{v}=$

$=\sum_{i=1}^{κ}(x_i-\bar{x})^2 f_i$

6) $S^2=\frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i\right)^2}{v}\right]=$

$=\sum_{i=1}^{κ}\frac{v_i}{v}x_i^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^{κ}v_i x_i}{v}\right)^2=\sum_{i=1}^{κ}f_i x_i^2-\bar{x}^2$

ΚΟΥΣΗΣ Π.
ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ.
ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε.
ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Θέματα Μαθηματικών Γενικής Παιδείας

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΜΕΡΟΣ 1ο

ΕΡ. Να δώσετε τον ορισμό της Στατιστικής κατά Fisher.
ΑΠ: Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:
– το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
– τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
– την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων

ΕΡ. Με τι ασχολείται:
α) ο σχεδιασμός πειραμάτων
β) η περιγραφική στατιστική
γ) η επαγωγική στατιστική ή στατιστική συμπερασματολογίας
ΑΠ. Ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται με το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων λέγεται **σχεδιασμός πειραμάτων**.
Ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται με την συνοπτική και αποτελεσματική παρουσιάση των δεδομένων λέγεται **Περιγραφική Στατιστική**.
Ο κλάδος που περιλαμβάνει τις μεθόδους με τις οποίες γίνεται η προσέγγιση των χαρακτηριστικών ενός μεγάλου συνόλου δεδομένων, με τη μελέτη των χαρακτηριστικών ενός μικρού υποσυνόλου των δεδομένων λέγεται **επαγωγική στατιστική ή στατιστική συμπερασματολογία**.

ΕΡ. Τι καλείται «πληθυσμός», από ποια στοιχεία αποτελείται και ποια τα χαρακτηριστικά του που εξετάζουμε;
ΑΠ. Πληθυσμός είναι ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία εξετάζουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά. Τα στοιχεία του πληθυσμού ονομάζονται μονάδες ή άτομα του πληθυσμού.
Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε ένα πληθυσμό λέγονται μεταβλητές (Variables) και συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα X, Y, Z..... . Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**.

ΕΡ. Να αναφέρεται τις διακρίσεις των μεταβλητών.
ΑΠ. Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:
1. Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.
2. Σε **ποσοτικές** μεταβλητές των οποίων οι τιμές τους είναι αριθμοί και διακρίνονται:
α) Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές.
β) Σε **συνεχείς** μεταβλητές που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).

ΕΡ. Τι καλείται απογραφή (census);
ΑΠ. Απογραφή καλείται η μέθοδος συλλογής δεδομένων όλω των στοιχείων (άτομα) ενός πληθυσμού για να εξετάσουμε το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Σε πολλές όμως περιπτώσεις η εξέταση όλων των μονάδων του πληθυσμού είναι δύσκολη ή ακόμα και αδύνατη (να αναφερθούν παραδείγματα).

ΕΡ. Τι ονομάζεται *δειγματοληψία*, τι ονομάζεται *δείγμα* και πότε ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό;
ΑΠ. Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της **δειγματοληψίας** (Sampling) που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής.
Δείγμα είναι το υποσύνολο του πληθυσμού. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του δείγματος θα είναι αξιόπιστα, αν η επιλογή του δείγματος γίνεται με σωστό τρόπο, ώστε το δείγμα να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού. Ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού, αν επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί.

ΕΡ. Ποια είναι τα είδη των πινάκων και ποια είναι τα απαραίτητα στοιχεία ενός στατιστικού πίνακα;
ΑΠ. Οι πίνακες διακρίνονται στους:
α) γενικούς πίνακες που περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μια στατιστική έρευνα.
β) ειδικούς πίνακες οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς, τα στοιχεία τους λαμβάνονται συνήθως από τους γενικούς πίνακες. Κάθε πίνακας πρέπει να περιέχει:
i) τον τίτλο που γράφεται στο άνω μέρος και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο ενός πίνακα.
ii) τις επικεφαλίδες των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.
iii) το κύριο σώμα(κορμό) που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα.
iv) την πηγή που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικώ στοιχείων.

ΕΡ. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα;
ΑΠ. Απόλυτη ή απλή συχνότητα (freguensy) είναι ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων και είναι πάντα $v_1+v_2+...v_κ = v$, $0\le v_i \le v$.
Ο υπολογισμός των συχνοτήτων γίνεται με **διαλογή** των παρατηρήσεων.

ΕΡ. Τι καλείται σχετική συχνότητα και ποιες είναι οι ιδιότητές της;
ΑΠ. Σχετική συχνόητα (relative ferguency) είναι το πηλίκο της συχνότητας V_i με το μέγεθος V του δείγματος δηλαδή:

$$f_i=\frac{v_i}{v}, i=1,2...κ$$

Ιδιότητες:
i) $0\le f_i\le 1$ για $i=1, 2...κ$ αφού $0\le V_i\le V$
ii) $f_1+f_2+...+f_κ=1$

$$f_1+f_2+...+f_κ=\frac{v_1}{v}+\frac{v_2}{v}+...+\frac{v_κ}{v}=\frac{v}{v}=1$$

ΕΡ. Τι ονομάζεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων;
ΑΠ. Οι ποσότητες x_i, v_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα που ονομάζεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων ή απλά πίνακας συχνοτήτων.

ΕΡ. Τι ονομάζεται κατανομή συχνοτήτων και τι κατανομή σχετικών συχνοτήτων;
ΑΠ. Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, v_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) ή των ζευγών $(x_i, f_i\%)$ την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων**.

ΕΡ. Τι ονομάζονται α) αθροιστικές συχνότητες και β) αθροιστικές σχετικές συχνότητες;
ΑΠ. Και οι δυο αναφέρονται σε ποσοτικές μεταβλητές.
α) Αθροιστικές συχνότητες (cumulative frequencies) Ni είναι οι συχνότητες που εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής xi.
β) Αθροιστικές σχετικές συχνότητες (cumulative relative frequenvies) Fi ή Fi% είναι οι συχνότητες που εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

ΕΡ. Ποια τα απαραίτητα στοιχεία ενός διαγράμματος και τι πλεονεκτήματα παρουσιάζουν;
ΑΠ. Οι γραφικές παραστάσεις (διαγράμματα) παρέχουν πιο σαφή εικόνα του χαρακτηριστικού σε σχέση με τους πίνακες και είναι πιο ενδιαφέρουσες και ελκυστικές.
Επιπλέον με τα διαγράμματα διευκολύνεται η σύγκριση μεταξύ ομοειδών στοιχείων για το ίδιο ή για διάφορα χαρακτηριστικά. Τα απαραίτητα στοιχεία ενός διαγράμματος είναι:
α) ο τίτλος
β) η κλίμακα με τις τιμές των μεγαθών που απεικονίζονται
γ) το υπόμνημα που επεξηγεί συνήθως τις τιμές της μεταβλητής
δ) η πηγή των δεδομένων

ΕΡ. Ποια είναι τα σπουδαιότερα διαγράμματα (μη ομαδοποιημένων παρατηρήσεων) και πότε χρησιμοποιείται καθένα από αυτά;
ΑΠ. α) Το ραβδόγραμμα (barchart) και το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Χρησιμοποιούνται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής
β)Το διάγραμμα συχνοτήτων (linediagram) και το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Χρησιμοποιούνται στις ποσοτικές μεταβλητές. Αν ενώσουμε τα σημεία (Xi, Vi) ή (Xi, fi) έχουμε το **πολύγωνο** συχνοτήτων ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** αντίστοιχα.
γ) Το κυκλικό διάγραμμα. Χρησιμοποιείται για ποσοτικές και ποιοτικές μεταβλητές.
δ) Το σημειόγραμμα. Χρησιμοποιείται όταν οι παρατηρήσεις είναι λίγες.
ε) Το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα. Χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός μεγέθους.

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. - ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. - ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Θέματα Μαθηματικών Γενικής Παιδείας

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΕΡΩΤΗΣΗ 1: Τι λέγεται γραφική παράσταση ή καμπύλη της f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Γραφική παράσταστη ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων M(x, (f(x)) για όλα τα $x \in A$. Επομένως, ένα σημείο M(x, y)του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν y=f(x).

ΕΡΩΤΗΣΗ 2: Τι λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η εξίσωση y=f(x) επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης f και λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4: Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει: Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5: Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6: Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in R$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 7: Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f στο x_0;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής (rate of change) του y=f(x) ως προς το x όταν $x=x_0$.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της f(x) ως προς x όταν $x=x_0$.
- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση x=f(t) είναι τη χρονική στιγμή t_0 $u(t_0)=f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της f(t) ως προς t όταν $t=t_0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8: Δείξτε ότι η f(x)=| x | δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν h<0 έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1,$$

ενώ όταν h>0, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1,$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 9: Ποια συνάρτηση λέγεται παράγωγος της f και συμβολίζεται f'(x);
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, και Β το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος (derivative) της f και συμβολίζεται με f'.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10: Ποια συνάρτηση λέγεται δεύτερη παράγωγος της f(f'');
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται η δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''. Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι x(t) τη χρονική στιγμή t, τότε η επιτάχυνσή του θα είναι α(t)=x''(t).

ΕΡΩΤΗΣΗ 11: Δείξτε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x)=c είναι f'(x)=(c)'=0.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 'Εχουμε: f(x+h)-f(x)=c-c=0 και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

οπότε $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$. Άρα (c)'=0.

ΕΡΩΤΗΣΗ 12: Δείξτε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x)=x είναι f'(x)=(x)'=1.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχουμε f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h, και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1.$$

Επομένως $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$.

Άρα (x)'=1.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13: Δείξτε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $f'(x)=(x^2)'=2x$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$, και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(2x+h)h}{h}=2x+h.$$

Επομένως $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$

Άρα $(x^2)'=2x$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 14: Δείξτε ότι η παράγωγος της συνάρτησης F(x)=cf(x) είναι (cf(x))'=cf'(x).
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η παράγωγος της συνάρτησης cf(x).
Έστω η συνάρτηση F(x)=cf(x). Έχουμε F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x)), και για $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x).$$

Άρα (cf(x))'=c f'(x).

ΕΡΩΤΗΣΗ 15: Δείξτε ότι η παράγωγος της συνάρτησης F(x)=f(x)+g(x) είναι (f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η παράγωγος της συνάρτησης f(x)+g(x).
Έστω η συνάρτηση F(x)=f(x)+g(x). 'Εχουμε F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)), και για $h\neq 0$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Επομένως $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$

=f'(x)+g'(x).
'Άρα (f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).

ΕΡΩΤΗΣΗ 16: Πώς βρίσκουμε την μονοτονία μιας συνάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f'(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, **β)** Αν για μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f'(x)<0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 17: Πώς προσδιορίζουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, f'(x)>0 στο (α,x_0) και f'(x)<0 στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο, **β)** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, f'(x)<0 στο (α,x_0) και f'(x)>0 στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο, **γ)** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και η f' δεν αλλάζει πρόσημο στο x_0 τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

ΚΟΥΣΗΣ Π - ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ.- ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. - ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.