ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Θέματα Μαθηματικών Κατεύθυνσης

ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ ΕΙΚΟΝΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

- Για να βρούμε τον Γεωμετρικό τόπο (γ.t) των εικόνων M του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο, θέτουμε $z=x+yi$ στην υπόθεση, οπότε αυτή μετατρέπεται σε εξίσωση της μορφής.

- $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ που είναι εξίσωση ευθείας.

- $x^2+y^2+Ax+Bx+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ που είναι εξίσωση κύκλου

με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και

ακτίνα $P=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

- $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=p^2$ που είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα p

- $y^2=2px$ ή $x^2=2py$ που είναι εξίσωση παραβολής με εστία

$E\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ ή $E\left(0, \frac{P}{2}\right)$

- $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που είναι εξίσωση έλλειψης με

εστίες $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$ με $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$

- $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που είναι εξίσωση υπερβολής με

εστίες $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$ με $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο Γεωμετρικός τόπος των εικόνων M των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους είναι:

1) $|z-z_0|=\rho$, όπου z_0 δεδομένος μιγαδικός και ρ θετικός πραγματικός, είναι κύκλος με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

2) $|z-z_1|=|z-z_2|$, όπου z_1, z_2 δεδομένοι μιγαδικοί είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB όπου A είναι η εικόνα του z_1 και B η εικόνα του z_2.

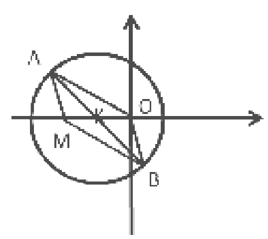
Άσκηση 1:
A. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w|^2+2Re(w)=3$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2+y^2=4$.
B. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος A με την ιδιότητα $|w_1-w_2|=4$, να αποδείξετε ότι $|w_1+w_2|=2$.
Γ. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει η σχέση $|iz+i-7|=|3+4i|$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2+(y+7)^2=25$.
Δ. Αν. w_3 μιγαδικός του ερωτήματος α και z_3 μιγαδικός του ερωτήματος Γ να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|w_3-z_3|$.

Λύση:
A. Έστω $w=x+yii$

$|w|^2+2Re(w)=3\Leftrightarrow x^2+y^2+2x=4-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+1=4\Leftrightarrow(x+1)^2+y^2=4$

B.



Αφού $|w_1-w_2|=4$ οι εικόνες των μιγαδικών w_1, w_2 είναι αντιδιαμετρικές του κύκλου με κέντρο K(-1, 0). Έστω Λ, B οι εικόνες των w_1, w_2 αντίστοιχα.
Αν πάρω τμήμα MK=OK τότε το ΟΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο K.
Επίσης $ΛB=|w_1-w_2|$ και επομένως:
$|w_1+w_2|=OM=2OK=2\cdot 1=2$

Γ. $|iz+i-7|=|3+4i|\Leftrightarrow|iz+i+7i^2|=\sqrt{3^2+4^2}\Leftrightarrow$

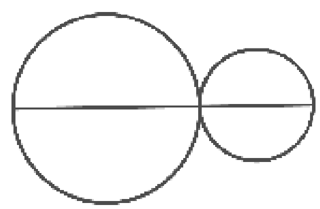
$\Leftrightarrow|i(z+1+7i)|=5\Leftrightarrow|i||z+1+7i|=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z-(-1-7i)|=5$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο A(-1, -7) και ακτίνα R=5.

Δ. $AK=\sqrt{(-1+1)^2+(-7-0)^2}=7=5+2=R+\rho$.

Επομένως οι κύκλου εφάπτονται εξωτερικά:



Άρα η μέγιστη τιμή του $|w_3-z_3|$ είναι $2R+2\rho=4+10=14$.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ Ή ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ

- Όταν ο μιγαδικός είναι στη μορφή $z=\alpha+\beta i$ τότε:

1) $z\in R\Leftrightarrow\beta=Im(z)=0$ 2) $z\in I\Leftrightarrow\alpha=Re(z)=0$

- Όταν ο μιγαδικός δεν είναι στη μορφή $z=\alpha+\beta i$ τότε:

1) $z\in R\Leftrightarrow z=\bar{z}\Leftrightarrow|z|^2=z^2$

2) $z\in I\Leftrightarrow z=-\bar{z}\Leftrightarrow|z|^2=-z^2$

Παράδειγμα 1ο:

Έστω $z_1,z_2,\in C$ με $|z_1|=|z_2|=1$ και $z_1,z_2\neq-1$

i) Δείξτε ότι $u=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in R$, $w=\frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}\in I$

ii) Δείξτε ότι ο $v=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\in R$

Λύση:

Είναι $|z_1|=1\Leftrightarrow|z_1|^2=1\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1\Leftrightarrow\bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$

Όμοια $\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$

i) Οπότε για να είναι:

- $u\in R$ αρκεί $u=\bar{u}$

Είναι $\bar{u}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}}=$

$=\frac{\frac{z_2+z_1}{z_1\cdot z_2}}{\frac{z_1z_2+1}{z_1z_2}}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=u$

- $w\in I$ αρκεί $w=-\bar{w}$

Είναι $-\bar{w}=-\overline{\left(\frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}\right)}=-\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}=-\frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_?}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}}=$

$=-\frac{\frac{z_2-z_1}{z_1z_2}}{\frac{z_1z_2+1}{z_1z_2}}=\frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}=w$

ii) Είναι $\bar{v}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_?}+\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}}=$

$=\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}=v$ Οπότε $v\in R$

Παράδειγμα 2ο:

Έστω $z\in C$, $\lambda\in R^*$ και $w=\frac{z+\lambda i}{iz+\lambda}$, $z\neq\lambda i$

Να δείξετε ότι $|w|=1\Leftrightarrow z\in R$

Είναι $|w|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z+\lambda i}{iz+\lambda}\right|=1\Leftrightarrow\frac{|z+\lambda i|}{|iz+\lambda|}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z+\lambda i|=|iz+\lambda|\Leftrightarrow|z+\lambda i|^2=|iz+\lambda|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z+\lambda i)\left(\overline{z+\lambda i}\right)=(iz+\lambda)\left(\overline{iz+\lambda}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z+\lambda i)(\bar{z}-\lambda i)=(iz+\lambda)(-i\bar{z}+\lambda)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-\lambda zi+\lambda\bar{z}i-\lambda^2i^2=-i^2z\bar{z}+\lambda zi-\lambda\bar{z}i+\lambda^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-\lambda zi+\lambda\bar{z}i+\lambda^2=z\bar{z}+\lambda zi-\lambda\bar{z}i+\lambda^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2\lambda zi+2\lambda\bar{z}i=0\Leftrightarrow2\lambda i(-z+\bar{z})=0\Leftrightarrow-z+\bar{z}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in R$

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. - ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. - ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ
για μαθητές με απαιτήσεις
ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος Τηλ.: 210 3814584, 210 3802012
ΑΓΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Λ. Βουλιαγμένης 244 (κοντά στο μετρό Δάφνης) Τηλ.: 210 9767676, 210 9767677
www.floropoulos.gr - info@floropoulos.gr

ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Θέματα Μαθηματικών Κατεύθυνσης

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Βήματα για την εύρεση αντίστροφης

Α. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

Β. Δείχνουμε ότι η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Για να δείξουμε ότι η f είναι 1-1 εργαζόμαστε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ κατασκευαστικά

καταλήγουμε στην $f(x_1) \neq f(x_2)$

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$

καταλήγουμε στην $x_1=x_2$

iii) Δείχνοντας ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Α

iv) Από τη γραφική παράσταση της f, αν είναι γνωστή

v) Δείχνοντας ότι η εξίσωση y=f(x) για κάθε $y \in f(A)$ έχει μια μόνο λύση ως προς x

Γ. Θέτω y=f(x) και βρίσκω την μοναδική λύση ως προς x. Στην προσπάθεια να λύσω την παραπάνω εξίσωση προκύπτουν περιορισμοί για το y, οι οποίοι αποτελούν το πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή το σύνολο τιμών της f. Τέτοιοι περιορισμοί προκύπτουν όταν:

i) <u>*Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου x*</u>

Παράδειγμα 1:
Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$

Λύση:
Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f:
Για να ορίζεται το κλάσμα πρέπει ο παρανομαστής να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Επομένως $A=\mathbb{R}-\{2\}$

Εξετάζω αν η f είναι 1-1:

Έστω $x_1,x_2\in A$ με

$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{x_1-1}{x_1-2}=\frac{x_2-1}{x_2-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-2)=(x_2-1)(x_1-2)\Leftrightarrow$

$x_1x_2-x_2-2x_1+2=x_1x_2-x_1-2x_2+2\Leftrightarrow -x_1=-x_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτω y=f(x) και λύνω ως προς x:

$y=\frac{x-1}{x-2}\Leftrightarrow yx-2y=x-1\Leftrightarrow (y-1)x=2y-1$

$\Leftrightarrow x=\frac{2y-1}{y-1}$ με $y\neq 1$

$\boxed{h(y)x=g(y)\Leftrightarrow x=\frac{g(y)}{h(y)},\ h(y)\neq 0}$

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{2y-1}{y-1}$, $y\in\mathbb{R}-\{1\}$, δηλαδή

$f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-1}$, $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{1\}$

ii) <u>*Λογαριθμούμε τα δύο μέλη της εξίσωσης*</u>

Παράδειγμα 2:
Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=e^{x-2}+3$

Λύση:
Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f:
$A=\mathbb{R}$

Εξετάζω αν η f είναι 1-1:

Έστω $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x_1-2}+3=e^{x_2-2}+3\Leftrightarrow e^{x_1-2}=e^{x_2-2}\Leftrightarrow$

$x_1-2=x_2-2\Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτω y=f(x) και λύνω ως προς x:

$y=e^{x-2}+3\Leftrightarrow e^{x-2}=y-3\Leftrightarrow x-2=\ln(y-3),\ y-3>0$

$\Leftrightarrow x=\ln(y-3)+2,\ y>3$

$\boxed{e^{g(x)}=h(y)\Leftrightarrow g(x)=\ln(h(y)),\ h(y)>0}$

Άρα $f^{-1}(y)=\ln(y-3)+2$, $y\in(3,+\infty)$, δηλαδή

$f^{-1}(x)=\ln(x-3)+2$, $A_{f^{-1}}=(3,+\infty)$

iii) <u>*Βάζουμε ρίζα και στα δύο μέλη της εξίσωσης*</u>

Παράδειγμα 3:
Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης

$f(x)=x^2-7$ στο $A=[0,+\infty)$

Λύση:
Εξετάζω αν η f είναι 1-1:

Έστω $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^2-7=x_2^2-7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2=x_2^2\Leftrightarrow x_1=x_2$, αφού $x_1,x_2\in[0,+\infty)$.

Άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτω y=f(x) και λύνω ως προς x:

$y=x^2-7\Leftrightarrow x^2=y+7\Leftrightarrow x=\sqrt{y+7},\ y+7\geq 0$

$\boxed{x^\nu=h(y),\ \nu \text{ άρτιος},\ x\geq 0\Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{h(y)},\ h(y)\geq 0}$

Άρα $f^{-1}(y)=\sqrt{y+7}$, $y\in[-7,+\infty)$, δηλαδή

$f^{-1}(x)=\sqrt{x+7}$, $A_{f^{-1}}=[-7,+\infty)$

Παράδειγμα 4:
Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x^2+3x-3$

Λύση:
Η f(x) γράφεται $f(x)=x^3-3x^2+3x-1-2=(x-1)^3-2$

Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f:
$A=\mathbb{R}$

Εξετάζω αν η f είναι 1-1:

Έστω $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow (x_1-1)^3-2=$

$=(x_2-1)^3-2\Leftrightarrow (x_1-1)^3=(x_2-1)^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτω y=f(x) και λύνω ως προς x:

$y=(x-1)^3-2\Leftrightarrow (x-1)^3=y+2$

- Αν $y+2\geq 0\Leftrightarrow y\geq -2$ έχουμε $x-1=\sqrt[3]{y+2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y+2}+1$

- Αν $y+2<0\Leftrightarrow y<-2$ έχουμε $x-1=-\sqrt[3]{-y-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{-y-2}+1$

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y+2}+1, & y\geq -2\\ -\sqrt[3]{-y-2}+1, & y<-2\end{cases}$,

δηλαδή $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+2}+1, & x\geq -2\\ -\sqrt[3]{-x-2}+1, & x<-2\end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l}x^\nu=h(y),\ \nu \text{ περιττός}\Leftrightarrow\\ x=\sqrt[\nu]{h(y)},\ h(y)\geq 0 \text{ ή}\\ x=-\sqrt[\nu]{-h(y)},\ h(y)<0\end{array}}$

iv) <u>*Υψώνω και τα δύο μέλη της εξίσωσης σε άρτιο εκθέτη*</u>

Παράδειγμα 5:
Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης

$f(x)=\sqrt{\sqrt{x-1}-2}$

Λύση:
Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f:
Για να ορίζονται οι ρίζες πρέπει οι υπόριζες ποσότητες να είναι μη αρνητικές:

$x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ και $\sqrt{x-1}-2\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\geq 2\Leftrightarrow x-1\geq 4\Leftrightarrow x\geq 5$

Οπότε $A=[5,+\infty)$

Εξετάζω αν η f είναι 1-1:

Έστω $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x_1-1}-2}=\sqrt{\sqrt{x_2-1}-2}\Leftrightarrow \sqrt{x_1-1}-2=\sqrt{x_2-1}-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1-1}=\sqrt{x_2-1}\Leftrightarrow x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτω y=f(x) και λύνω ως προς x:

$y=\sqrt{\sqrt{x-1}-2}\Leftrightarrow y^2=\sqrt{x-1}-2,\ y\geq 0\Leftrightarrow$

$y^2+2=\sqrt{x-1},\ y\geq 0\Leftrightarrow (y^2+2)^2=x-1,\ y\geq 0$

αφού $y^2+2>0$ για οποιοδήποτε y.

Τελικά $x=(y^2+2)^2+1,\ y\geq 0$

Άρα $f^{-1}(y)=(y^2+2)^2+1$, $y\in[0,+\infty)$,

δηλαδή $f^{-1}(x)=(x^2+2)^2+1$, $x\in[0,+\infty)$

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. - ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ
ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ
για μαθητές με απαιτήσεις
ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ
ΑΓΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
www.floropoulos.gr - info@floropoulos.gr