ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Θέματα Φυσικής Κατεύθυνσης

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ - ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ (Παρατηρήσεις-Μεθοδολογία)

1. *Η ροπή μιας δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν, όταν:*
α. η δύναμη ασκείται πάνω στον άξονα περιστροφής.
β. ο φορέας της δύναμης τέμνει τον άξονα περιστροφής.
γ. ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος προς τον άξονα περιστροφής.

2. *Ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις ισορροπεί, όταν:*

$$\Sigma\vec{F}=0 \ (\Sigma F_x=0 \text{ και } \Sigma F_\psi=0) \text{ και } \Sigma\vec{\tau}=0$$

Η πρώτη συνθήκη αποκλείει τη μεταφορική κίνηση και η δεύτερη τη στροφική κίνηση.

3. *Όταν ένα στερεό σώμα είναι αρχικά ακίνητο ($\omega_0=0$ και $u_0=0$) και ασκούνται σ' αυτό πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις ισχύει:*
α. Αν το σώμα έχει σταθερό (ακλόνητο) άξονα περιστροφής, τότε μπορεί να εκτελέσει μόνο περιστροφική κίνηση οπότε για να ισορροπεί θα πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα αυτόν να είναι μηδέν.

$$\Sigma\vec{\tau}=0$$

β. Αν το σώμα έχει ελεύθερο άξονα περιστροφής, τότε μπορεί να εκτελέσει και μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Έτσι για να ισορροπεί θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων και το αλγεβρικό άρθοισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα οποιουδήποτε σημείου να είναι μηδέν.

$$\Sigma\vec{\tau}=0(\Sigma\vec{F}_x=0 \text{ και } \Sigma\vec{F}_\psi=0) \text{ και } \Sigma\vec{\tau}=0$$

4. Αν σ' ένα σώμα, που ισορροπεί, ασκούνται κ δυνάμεις και οι φορείς των κ-1 δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε και ο φορέας της τελευταίας δύναμης θα διέρχεται από το σημείο τομής.

5. Αν σ' ένα σώμα, που ισορροπεί, ασκούνται κ δυνάμεις και οι κ-1 από αυτές είναι παράλληλες μεταξύ τους τότε και η τελευταία δύναμη θα είναι παράλληλη με τις άλλες.

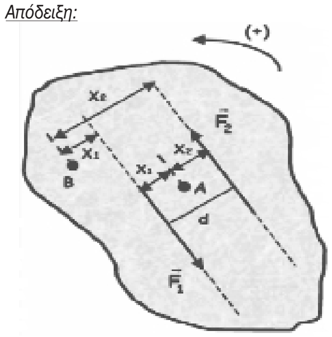
6. *Ζεύγος δυνάμεων ονομάζεται το σύστημα δύο παράλληλων δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ οι*

οποίες ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος έχουν αντίθετες φορές και ίσα μέτρα ($F_1=F_2=F$).
Η ροπή ενός ζεύγους δυμάμεων είναι ίση με το γινόμενο του μέτρου της μίας από τις δύο δυνάμεων επί την απόσταση d μεταξύ των δύο δυνάμεων δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\tau_{ζεύγους}=F\ d$$

α. Ένα ζεύγος δυνάμεων έχει ως μοναδικό αποτέλεσμα την περιστροφή του στερεού σώματος στο οποίο ασκείται.
β. Ένα ζεύγος δυνάμεων δεν μπορεί να αντικατασταθεί από μία μόνο δύναμη.
γ. Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων αποδεικνύεται ότι είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.

Απόδειξη:



Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο Α του επιπέδου που ορίζουν οι δύο δυνάμεις τότε το μέτρο της ροπής του ζεύγους των δυνάμεων ως προς το σημείο αυτό είναι ίσο με:

$$\tau_{ζεύγους}=F_1X_1+F_2X_2 \xrightarrow{F_1=F_2=F}$$

$$\tau_{ζεύγους}=F_1(X_1+X_2)\rightarrow\tau_{ζεύγους}=F\ d$$

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

1. Ροπή αδράνειας υλικού σημείου μάζας m.
Η ροπή αδράνειας ενός υλικού σημείου μάζας m, το οποίο κινείται κυκλικά σε κύκλο ακτίνας r, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδο της δίνεται από τη σχέση: $I=m\,r^2$

2. Ροπή αδράνειας ομογενούς δακτυλίου μάζας Μ και ακτίνας R. Η ροπή αδράνειας ομογενούς δακτυλίου μάζας Μ και ακτίνας R, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει αποδεικνύεται (παράδειγμα 4.5 σελίδα 118 σχολικού βιβλίου) ότι δίνεται από τη σχέση:

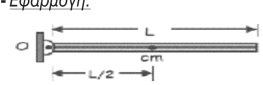
$$I=M\,R^2$$

3. Από ποιους παράγοντες εξαρτάται η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα.
α. Από την ολική μάζα του σώματος.
β. Από την κατανομή της μάζας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, η οποία έχει να κάνει με το σχήμα και το μέγεθος του σώματος.
γ. Από τη θέση του άξονα περιστροφής.

4. Θεώρημα παράλληλων αξόνων (Steiner):
Με το θεώρημα του Steiner υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας ενός στερεού, ως προς οποιοδήποτε άξονα, παράλληλο στον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$I=I_{cm}+M\,d^2$$

όπου I_{cm} η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας Μ, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, I η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που είναι παράλληλος με τον προηγούμενο και d η απόσταση μεταξύ των δύο αξόνων.
- *Εφαρμογή:*



Η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής που περνάει από το άκρο της Ο, αν δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm}=1/12\,M\,L^2$ είναι:

$$\text{Θεώρημα του Steiner: } I_{(O)}=I_{cm}+M\left(\frac{L}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{12}M\,L^2+M\frac{L^2}{4}\rightarrow I_{(O)}=\frac{1}{3}M\,L^2$$

- Από τη σχέση του Steiner παρατηρούμε ότι την ελάχιστη ροπή αδράνειας οποιουδήποτε στερεού την έχουμε αν το στερεό στρέφεται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, δηλαδή: $I_{min}=I_{cm}$.
- Τα σώματα που θεωρούνται αβαρή (έχουν αμελητέα μάζα)δεν έχουν ροπή αδράνειας ως προς οποιονδήποτε άξονα περιστροφής.

5. Ροπή αδράνειας ενός συστήματος σωμάτων
- Η ροπή αδράνειας ενός συστήματος σωμάτων $I_{συστ}$ ως προς κάποιον άξονα περιστροφής, είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών αδράνειας των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα ως προς τον ίδιο άξονα.

6. Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής.

- Μεταφορική κίνηση: $\Sigma\vec{F}=m\,\vec{a}_{cm}$

Αν $\Sigma F=0$ τότε και $a_{cm}=0$ δηλαδή το σώμα θα είναι ακίνητο ή θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση οπότε θα ισχύει:

$$u_{cm}=0 \text{ ή } \Delta x=u_{cm}\,\Delta t \text{ όταν } \vec{u}_{cm}=\text{σταθερό}$$

$$\text{Αν } \Sigma\vec{F}=\text{σταθ. τότε και } \vec{a}_{cm}=\frac{\Sigma\vec{F}}{m}=\text{σταθ.}$$

δηλαδή το σώμα θα κάνει ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Αν $\Sigma\vec{F}>0$ και $\vec{a}_{cm}>0$ (ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση).

Ενώ αν $\Sigma\vec{F}<0$ θα είναι $\vec{a}_{cm}<0$ (ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση).
Οπότε θα ισχύει:

$$u_{cm}=u_0\pm a_{cm}t \text{ και } \Delta x=u_0t\pm\frac{1}{2}a_{cm}t^2$$

- Περιστροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\,a_{γων}$
Αν $\Sigma\tau=0$ τότε $a_{γων}=0$ δηλαδή το σώμα θα είναι ακίνητο ή θα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση οπότε θα ισχύει:

$$\omega=0 \text{ ή } \Delta\theta=\omega\,\Delta t \text{ όταν } \vec{\omega}=\text{σταθερό}$$

$$\text{Αν } \Sigma\vec{\tau}=\text{σταθ. τότε και } \vec{a}_{γων}=\frac{\Sigma\vec{\tau}}{I}=\text{σταθ.}$$

Δηλαδή το σώμα θα κάνει ομαλά μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση.

Αν $\Sigma\vec{\tau}>0$ και $\vec{a}_{γων}>0$ (ομαλά επιταχυνόμενη).

Ενώ αν $\Sigma\vec{\tau}<0$ θα είναι $\vec{a}_{γων}<0$(ομαλά επιβραδ.)

Οπότε θα ισχύει:

$$\omega=\omega_0\pm a_{γων}t \text{ και } \Delta\theta=\omega_0t\pm\frac{1}{2}a_{γων}t^2$$

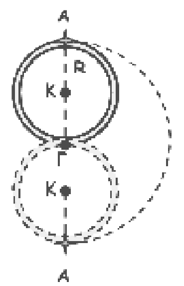
ΗΜΕΛΛΟΣ Μ. - ΠΟΘΗΤΑΚΗΣ Β.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Θέματα Φυσικής Κατεύθυνσης

Άσκηση 1:

Ένα βραχιόλι, που αποτελείται από χρυσό ομογενή κρίκο μάζας m=20gr και ακτίνας R=5 cm και από διαμάντι μάζας m/8, έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται κατακόρυφα γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Γ και είναι κάθετος στο επίπεδο του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το βραχιόλι συγκρατείται αρχικά έτσι, ώστε το διαμάντι να βρίσκεται στην ανώτερη θέση Α μιας κατακόρυφης διαμέτρου ΑΓ του βραχιολιού και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφήνεται ελεύθερο.



α) Να βρείτε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας που έχει το διαμάντι, όταν αυτό βρεθεί στην κατώτερη θέση της κατακόρυφης διαμέτρου ΑΓ του βραχιολιού.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του βραχιολιού όταν το διαμάντι βρεθεί στην κατώτερη θέση της κατακόρυφης διαμέτρου του ΑΓ.

γ) Να βρείτε πόσο έχει στραφεί το βραχιόλι όταν το σύστημα αποκτάει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του και να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού αυτού.

δ) Όταν το διαμάντι βρεθεί στην κατώτερη θέση της κατακόρυφης διαμέτρου του ΑΓ εκτινάσσεται από το βραχιόλι με οριζόντια ταχύτητα $u_1=6$ m/s. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του βραχιολιού αμέσως μετά την αποκόλληση του διαμαντιού.
Δίνεται: $g=10$ m/s^2.

Λύση:

α) Η ροπή αδράνειας του κρίκου ως προς τον άξονα περιστροφής του (Γ) είναι σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner.

$$I_{κρίκου}=I_{cm}+m\,R^2=m\,R^2+m\,R^2=2\,m\,R^2.$$

Άρα η ροπή αδράνειας $I_{συστ.}$ του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του (Γ) είναι:

$$I_{συστ.}=I_{κρίκου}+I_{διαμ}=2m\,R^2+\frac{m}{8}(2R)^2\rightarrow$$

$$I_{συστ.}=2m\,R^2+\frac{m}{8}4R^2\rightarrow$$

$$I_{συστ.}=2m\,R^2+\frac{m}{2}R^2\rightarrow I_{συστ.}=\frac{5\,m\,R^2}{2}.$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για το σύστημα μεταξύ της ανώτερης και κατώτερης θέσης του βραχιολιού.

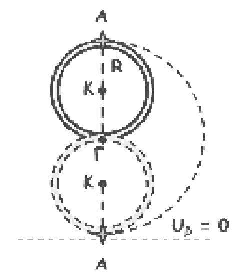
$$E^{αρχ}_{μηχ}=E^{τελ}_{μηχ}\rightarrow K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$0+m\,g\,3R+\frac{m}{8}g\,4R=\frac{1}{2}\,I_{συστ.}\omega^2+m\,g\,R+0\rightarrow$$

$$\frac{7}{2}m\,g\,R=\frac{1}{2}\,\frac{5\,m\,R^2}{2}\,\omega^2+m\,g\,R\rightarrow$$

$$\frac{5}{2}m\,g\,R=\frac{1}{2}\,\frac{5\,m\,R^2}{2}\,\omega^2\rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2\,g}{R}}=\sqrt{400}=20\text{ rad/s.}$$



Άρα η γραμμική ταχύτητα του διαμαντιού, όταν αυτό βρεθεί στην κατώτερη θέση της κατακόρυφης διαμέτρου ΑΓ του βραχιολιού είναι:

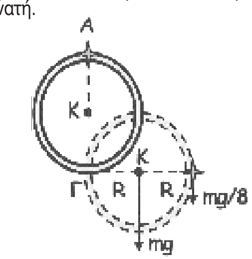
$$u_δ=\omega(2R)=20\,10^{-1}\rightarrow u_δ=2\text{m/s.}$$

β) Η γωνιακή επιτάχυνση του βραχιολού όταν το διαμάντι βρεθεί στην κατώτερη θέση της κατακόρυφης διαμέτρου του ΑΓ υπολογίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης:

$$Στ_{(Γ)}=I_{συστ.}\,α_γ.$$

Όμως $Στ_{(Γ)}=0$ αφού όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο βραχιόλι (βάρη του διαμαντιού, του κρίκου και η δύναμη από τον άξονα) έχουν φορείς που διέρχονται, στη θέση αυτή, από το σημείο περιστροφής του συστήματος Γ. Άρα θα είναι $α_γ=0$.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος είναι ίσος με $dL/dt=Στ(Γ)$, άρα θα γίνεται μέγιστος όταν και η ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στο βραχιόλι θα είναι μέγιστη. Αυτό θα συμβεί όταν το βραχιόλι έχει στραφεί κατά 90^0, γιατί στη θέση αυτή η απόσταση του άξονα από τους φορείς των δυνάμεων είναι η μέγιστη δυνατή.



$$\text{Άρα: }\left(\frac{dL}{dt}\right)_{max}=Στ_{(Γ)}=m\,g\,R+\frac{m}{8}g\,2R=$$

$$=\frac{5m}{4}\,g\,R\rightarrow\left(\frac{dL}{dt}\right)_{max}=1{,}25\,10^{-2}\text{N m.}$$

δ) Την στιγμή της αποκόλλησης του διαμαντιού από το βραχιόλι, στο βραχιόλι δεν ενεργούν εξωτερικές ροπές ($Στ_{εξ}=0$) άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.

$$L_{αρχ}=L_{τελ}\rightarrow L^{αρχ}_{συστ.}=L^{τελ}_{κρίκου}+L^{τελ}_{διαμαντιού}\rightarrow$$

$$\rightarrow I_{συστ.}\,\omega=I_{κρίκου}\,\omega_1+\frac{m}{8}\,u_1\,2R\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{5\,m\,R^2}{2}\,\omega=2m\,R^2\,\omega_1+\frac{m}{4}\,u_1\,R\rightarrow$$

$$\rightarrow 10\,R\,\omega=8\,R\,\omega_1+u_1\rightarrow\omega_1=10\text{ rad/s.}$$

Άρα η κινητική ενέργεια του βραχιολιού θα είνα ίση με:

$$K_{βρ.}=\frac{1}{2}\,I_{κρίκου}\,\omega_1^2=\frac{1}{2}\,2\,m\,R^2\,\omega_1^2\rightarrow$$

$$\rightarrow K_{βρ.}=2\,10^{-2}\,25\,10^{-4}\,10^2=5\,10^{-3}\text{ J.}$$

ΗΜΕΛΛΟΣ Μ. - ΠΟΘΗΤΑΚΗΣ Β.