ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Θέματα Μαθηματικών Γενικής Παιδείας

Κεφάλαιο 3ο
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ: Α. Τι ονομάζεται πείραμα τύχης;
Β. Ποιο πείραμα λέγεται αιτιοκρατικό;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:Α. Υπάρχουν πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης (random experiment).
Β. Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα.

ΕΡΩΤΗΣΗ:Τι είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται *δειγματικός χώρος* (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι λέγεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται ενδεχόμενο (event) ή γεγονός.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποιο ενδεχόμενο λέγεται απλό και ποιο σύνθετο;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ένα ενδεχόμενο λέγεται *απλό* όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και *σύνθετο* αν έχει περισσότερα στοιχεία.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποιο ενδεχόμενο λέγεται βέβαιο και ποιο αδύνατο;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το Ω λέγεται *βέβαιο ενδεχόμενο*. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το *αδύνατο ενδεχόμενο*.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: *Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, όταν* $A\cap B=\varnothing$. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης *ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα*.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Τι λέει ο νόμος των μεγάλων αριθμών;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται κα θεωρητικά, ονομάζεται *στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών*.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Δώστε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοικών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έστι έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.
Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$ **2.** $P(\varnothing)=\frac{0}{N(\Omega)}=0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0\leq P(A)\leq 1$,

αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Δώστε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,...,\omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης τότε:
$P(\omega_1)+P(\omega_2+...+P(\omega_\nu)=1$ και

$0\leq P(\omega_\nu)\leq 1$, $i=1, 2,...,\nu$.

Αν Α είναι ένα ενδεχόμενο του Ω τότε:

$A=\{\omega_1, \omega_2,...,\omega_\kappa\}$, $\kappa\leq\nu$

$P(A)=P(\omega_1)+\omega_2+...+P(\omega_\kappa)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Δείξετε αν Α, Β ασυμβίβαστα ενδεχόμενα τότε

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

Απόδειξη: Αν N(A) =κ και N(B)=λ, τότε το $A\cup B$ έχει κ+λ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα Α και Β

δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε:

$$N(A\cup B)=\kappa+\lambda=N(A)+N(B)$$

Επομένως:

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}$$

$$=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως απλός προσθετικός νόμος (siply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε

$$P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$$

ΕΡΩΤΗΣΗ: Δείξετε ότι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ισχύει P(A')=1-P(A).
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α' ισχύει:

$$\boxed{P(A')=1-P(A)}$$

Απόδειξη: Επειδή $A\cap A'=\varnothing$, δηλαδή Α και Α' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$P(A\cup A')=P(A)+P(A'$
$P(\Omega)=P(A)+P(A')$
$1=P(A)+P(A')$

Οπότε P(A')=1-P(A).

ΕΡΩΤΗΣΗ: Δείξετε ότι δυο τυχαία ενδεχόμενα Α, Β ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Για δύο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B),\ (1)$$

αφού στο άθροισμα N(A)+N(B) το πλήθος των στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με N(Ω) έχουμε:

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως προσθετικός νόμος (additive law).

ΕΡΩΤΗΣΗ: Δείξτε ότι $A\subseteq B$ τότε $P(A)\leq P(B)$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: *Απόδειξη:*

Επειδή $A\subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$N(A)\leq N(B)$

$\frac{N(A)}{N(\Omega)}\leq\frac{N(B)}{N(\Omega)}$

$P(A)\leq P(B)$

ΕΡΩΤΗΣΗ: Δείξτε ότι για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: *Απόδειξη:*
Επειδή τα ενδεχόμενα Α-Β και $A\cap B$ είναι

ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$, έχουμε:

$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$.

Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. - ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. - ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Θέματα Μαθηματικών Γενικής Παιδείας

Άσκηση 1η: Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση

$$f(x)=e^x-x+5,\ x\in R$$

Β) Έστω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης $\Omega=\{1, 2, 3, \kappa, \lambda\}$ όπου

$$\kappa=8\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{2-x}}{x-1}$$

και λ η ελάχιστη τιμή της μέσης τιμής των παρατηρήσεων $3e^x$, 15, $-3x$.

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές των κ, λ.
ii) Για κ=4, λ=6 να υπολογίσετε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομέων P(1), P(2), P(3), P(4), P(6) του δειγματικού χώρου6 Ω αν είναι γνωστό ότι

$$P(1)=P(2)=P(3)=\frac{P(4)}{4}=\frac{P(6)}{3}.$$

iii) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β όπου

$$A=\{\mu\in\Omega\ /\ x^2+\mu x+4\neq 0,\ \text{για κάθε } x\in R\}$$

$$B=\{t\in\Omega\ /\ f''(t)\geq e^3\}$$

iv) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A\cap B$, $A-B$, $A\cup B$.

Λύση: Α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=e^x-1$.
Διαδοχικά έχουμε:

$f'(x)\geq 0$ ή $e^x-1\geq 0$ ή $e^x\geq 1$ ή $e^x\geq e^0\ (e^x\uparrow)$ ή $x\geq 0$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	ελ.	↗

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $[-\infty, 0]$

Η f είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty]$

Η f' στο x=0 παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0)=e^0-0+5=6$

Βi) $\kappa=8\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{2-x}}{x-1}=8\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(1+\sqrt{2-x})}=$

$=8\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{2-x}}=8\cdot\frac{1}{2}=4$

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων $3e^x$, 15, $-3x$ είναι:

$\bar{X}=\frac{3e^x+15-3x}{3}=e^x-x+5=f(x)$

και από το ερώτημα i προκύπτει ότι λ=6.

ii) Για κ=4, λ=6 έχουμε $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 6\}$
Επειδή $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(6)=1$ έχουμε ότι $P(1)+P(1)+P(1)+4P(1)+3P(1)=1$ ή $10P(1)=1$ ή
$P(1)=\frac{1}{10}$

Άρα $P(2)=\frac{1}{10}$, $P(3)=\frac{1}{10}$, $P(4)=\frac{2}{5}$, $P(6)=\frac{3}{10}$

iii) Για το σύνολο Α: $x^2+\mu x+4\neq 0$ για κάθε $x\in R$ οπότε $\Delta<0$ δηλ. $\mu^2-16<0$ ή $\mu^2<16$. Επειδή με Ω έχουμε $\mu<4$ οπότε $A=\{1, 2, 3\}$.
Για το σύνολο Β: $f'(x)=e^x-1$ και $f''(x)=e^x$, $x\in R$

οπότε $f''(t)\geq e^3$ ή $e^t\geq e^3$ άρα $t\geq 3$, $t\in\Omega$

Άρα $B=\{3, 4, 6\}$

Οπότε $P(A)=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{3}{10}$

$P(B)=P(3)+P(4)+P(6)=\frac{4}{5}$

iv) $A\cap B=\{3\}$ οπότε $P(A\cap B)=P(3)=\frac{1}{10}$

$A-B=\{1, 2\}$οπότε $P(A-B)=P(1)+P(2)=\frac{1}{5}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,6\}=\Omega$

οπότε $P(A\cup B)=P(\Omega)=1$

Άσκηση 2η: Σε ένα Λύκειο Α το ποσοστό των μαθητών της Γ Λυκείου που έχει βαθμολογία στα Μαθηματικά από 7-16 είναι 81,5% με $\bar{X}_A<13$. Σε άλλο λύκειο Β το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών που έχει βαθμολογία από 6-14 είναι 83,85% $\bar{X}_B>8$. Και στα δύο λύκεια η βαθμολογία των μαθητών στα Μαθηματικά ακολουθεί την κανονική κατανομή.

α) Να βρεθεί σε ποιο από τα 2 λύκεια η βαθμολογία παρουσιάζει την καλύτερη ομοιογένεια.

β) Αν $\bar{X}_A=10$, $\bar{X}_B=12$ και γνωρίζουμε ότι οι μαθητές του Β' λυκείου είναι τριπλάσιοι από τους μαθητές του Α λυκείου να βρεθεί η μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών και των δύο λυκείων.

γ) Στο Β τετράμηνο όλοι οι μαθητές του Α λυκείου αύξησαν την βαθμολογία τους κατά C μονάδες ενώ οι μαθητές του Β λυκείου αύξησαν τη βαθμολογία τους κατά 10%.
i) Να βρείτε (αν υπάρχει) τη μικρότερη τιμή της θετικής σταθεράς c που πρέπει να προστεθεί στις βαθμολογίες του Α λυκείου στο τέλος του Β τετραμήνου ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.
ii) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών του Β λυκείου στο Β τετράμηνο των οποίων η βαθμολογία κυμαίνεται από (11 -15, 4).

δ) Δίνετια η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+3$. Αν ν το μέγεθος των μαθητών του Α λυκείου και $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$,...$A_\nu(x_\nu, f(x_\nu))$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπου $x_1, x_2,...,x_\nu$ οι βαθμολογίες των μαθητών του Α λυκείου στο 1ο τετράμηνο να βρείτε τη μέση τιμή των τεταγμένων των σημείων.

Δίνεται: $S^2=\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right)$

Λύση: α) $\left.\begin{aligned}\bar{X}_A-S_A&=7\\ \bar{X}_A+2S_A&=16\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow 3S_A=9\Leftrightarrow \begin{aligned}S_A&=3\\ \bar{X}_A&=10\end{aligned}$

$\left.\begin{aligned}\bar{X}_B-3S_B&=6\\ \bar{X}_B+S_B&=14\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \begin{aligned}S_B&=2\\ \bar{X}_B&=12\end{aligned}$

$\left.\begin{aligned}CV_A&=\frac{S_A}{\bar{X}_A}=\frac{3}{10}=0,30\\ CV_B&=\frac{S_B}{\bar{X}_B}=\frac{2}{12}=0,17\end{aligned}\right\}$ Επειδή $CV_B<CV_A$ το Λύκειο Β παρουσιάζει καλύτερη ομοιγένεια

β) $\bar{X}=\frac{V_A\bar{X}_A+V_B\bar{X}_B}{V_A+V_B}=\frac{V_A\cdot 10+3V_A\cdot 12}{4V_A}=$

$=\frac{V_A(10+3\cdot 12)}{4V_A}=\frac{46}{4}=11,50$

γi) Η μέση τιμή των βαθμολογιών των μαθητών του Α λυκείου στο Β τετράμηνο είναι:

$\bar{Y}_A=\bar{X}_A+C=10+C$ $\quad S_Y=S_A=3$ οπότε

$CV=\frac{3}{10+C}\leq 0,10\Leftrightarrow\frac{3}{10+C}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10+C\geq 30\Leftrightarrow C\geq 20$
Άρα C=20 (απορίπτεται γιατί η βαθμολογία είναι 0-20)

ii) Η μέση τιμή των βαθμολογιών του Β λυκείου στο Β τετράμηνο είναι:
$\bar{Y}_B=1,1\cdot\bar{X}_B=1,1\cdot 12=13,2$ και η τυπική απόκλιση είναι $S_Y=1,1\cdot S_B=1,1\cdot 2=2,2$.
Οπότε το ποσοστό των μαθητών του Β λυκείου των οποίων η βαθμολογία στο Β τετράμηνο κυμαίνεται από (11-15,4) είναι 68%.

δ) $\bar{Y}=\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_\nu)}{\nu}=$

$=\frac{x_1^2-5x_1+3+x_2^2-5x_2+3+...+x_\nu^2-5x_\nu+3}{\nu}=$

$=\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_\nu^2-5(x_1+x_2+...+x_\nu)+3\nu}{\nu}$

$=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2}{\nu}-5\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}+3$

$=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2}{\nu}-5\bar{X}_A+3$

Επειδή $S^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right]=\frac{\Sigma x_i^2}{\nu}-\left(\frac{\Sigma x_i}{\nu}\right)^2$ ή

$S^2=\frac{\Sigma x_i^2}{\nu}-\bar{x}^2\Leftrightarrow 9=\frac{\Sigma x_i^2}{\nu}-10^2$
$\Leftrightarrow\frac{\Sigma x_i^2}{\nu}=109$

Άρα $\bar{y}=\frac{\Sigma x_i^2}{\nu}-5\bar{x}_A+3=$

$=109-5\cdot 10+3=62$

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. - ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. - ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.