ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΟΥΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Θέματα Μαθηματικών Κατεύθυνσης

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

1. Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:
i) η f είναι συνεχής στο [α, β] και
ii) $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοιχτό διάστημα (α, β).

Παρατηρήσεις:
i) Αν κατά την εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano προκύψει ότι

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)\leq 0$$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
ii) Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο διάστημα (α, β) όχι κατ' ανάγκην μοναδικής.
iii) Για να είναι μοναδική η ρίζα που εξασφαλίζεται από το θεώρημα Bolzano, πρέπει ακόμα να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).
iv) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β), αυτό δε συνεπάγεται ότι $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.
v) Αν σε ένα θέμα θέλουμε να αποδείξουμε μια ιδιότητα $f(\xi)=\xi$ ή $f(x_0)=x_0$ ή $f(\gamma)=\gamma$, όπου f συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Φέρνουμε το δεύτερο μέλος στο πρώτο, δηλαδή $f(\xi)-\xi=0$ ή $f(x_0)-x_0=0$ ή $f(\gamma)-\gamma=0$.
- Χρησιμοποιούμε μια βοηθητική συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x$.
- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την g στο [α, β].
iv) Αν για μια εξίσωση $f(x)=0$ ζητούνται δύο τουλάχιστον σημεία $\xi_1, \xi_2\in(\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε, $f(\xi_1)=0$ και $f(\xi_2)=0$,
τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα [α, γ] και [γ, β] τα οποία ή δίνονται ή επιλέγουμε εμείς κατάλληλο $\gamma\in[\alpha, \beta]$ ανάλογα με τα δεδομένα της άσκησης.

vii) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα (α, β) και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε σημείο x του (α, β) τότε θα είναι:

$f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$ ή

$f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$,

δηλαδη η f λέμε ότι διατηρεί πρόσημο στο (α, β).
viii) Έστω ότι μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] έχει δύο ρίζες $\xi_1, \xi_2\in(\alpha, \beta)$.

Τότε το [α, β] χωρίζεται στα διαστήματα $[\alpha, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2), $(\xi_2, \beta]$ (υποθέτουμε $\xi_1<\xi_2$). Σε καθένα από τα διαστήματα αυτά η f διατηρεί πρόσημο, το οποίο προσδιορίζουμε ως εξής: Επιλέγουμε έναν αριθμό $\kappa\in[\alpha, \xi_1)$ και έστω ότι $f(\kappa)>0$.

Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha, \xi_1)$.

Ανάλογα εργαζόμαστε και για τα διαστήματα (ξ_1, ξ_2) και $(\xi_2, \beta]$.

2. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα, [α, β]. Αν:
i) Η f είναι συνεχής στο [α, β] και
ii) $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=n$.

Απόδειξη:
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<n<f(\beta)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-n,\ x\in[\alpha, \beta].$$

Τότε:
i) η g είναι συνεχής στο [α, β] και
ii) $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$ αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-n<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-n>0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0)=0$ ή $f(x_0)-n=0$, οπότε $f(x_0)=n$.

Παρατηρήσεις:
i) Μια άλλη έκφραση του παραπάνω θεωρήματος είναι η εξής: Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

τότε η f παίρνει υποχρεωτικά και όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των f(α) και f(β).
ii) Αν η f δεν είναι συνεχής στο [α, β] τότε δεν παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ f(α) και f(β).
iii) Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών κάθε ευθεία με εξίσωση $y=\kappa$, με κ μεταξύ των f(α) και f(β), τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο.
iv) Αποδεικνύεται ακόμα ότι: Αν η f είναι συνεχής και μη σταθερή σ' ένα διάστημα Δ, τότε το f(Δ) είναι επίσης διάστημα.
v) Αν το Δ είναι κλειστό διάστημα τότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

3. Θεώρημα (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν f είναι συνάρτηση συνεχής στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Παρατηρήσεις:
i) Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα αν η f είναι συνεχής στο $\Delta=[\alpha, \beta]$ και αλλάζει μονοτονία στο Δ, τότε υπάρχουν $x_1, x_2\in[\alpha, \beta]$

τέτοια, ώστε αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$ να ισχύει

$m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$,

δηλαδή $f(\Delta)=[m, M]$.
ii) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[\alpha, \beta]$, τότε $x_1=\alpha$ και $x_2=\beta$ οπότε $m=f(\alpha)$ και $M=f(\beta)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta)=[(f(\alpha), f(\beta)]]$.
iii) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=[\alpha, \beta]$, τότε $x_1=\beta$ και $x_2=\alpha$ οπότε $m=f(\beta)$ και $M=f(\alpha)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta)=[f(\beta), f(\alpha)]$.

4. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα
$\Delta=(\alpha, \beta)$ και $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=B$.

Τότε ισχύει:
i) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε έχει σύνολο τιμών στο διάστημα $f(\Delta)=(A, B)$.
ii) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε έχει σύνολο τιμών στο διάστημα $f(\Delta)=(B, A)$.

Παρατηρήσεις:
i) Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[\alpha, \beta)$ τότε $f(\Delta)=[f(\alpha), B)$ όπου
$B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$
ii) Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=[\alpha, \beta)$ τότε $f(\Delta)=(B, f(\alpha)]$ όπου
$B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$
iii) Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(\alpha, \beta]$ τότε $f(\Delta)=(A, f(\beta)]$ όπου
$A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$
iv) Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=(\alpha, \beta]$ τότε $f(\Delta)=[f(\beta), A)$ όπου
$A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$

Τονίζουμε και πάλι ότι, αν το Δ είναι ανοικτό διάστημα και η f δεν είναι γνωστή μονότονη στο Δ, τότε το f(Δ) μπορεί να είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα.

Παράδειγμα:
Να δείξετε ότι η εξίσωση $x+\kappa\eta\mu x=4$ όπου

$\kappa\in(-1,0)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,4-κ].

Λύση:
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=x+\kappa\eta\mu x-4,\ x\in[0,4-\kappa]$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4-κ] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$f(0)=-4<0$

$f(4-\kappa)=4-\kappa+\kappa\eta\mu(4-\kappa)-4=\kappa[\eta\mu(4-\kappa)-1\geq 1$

αφού $\kappa\in(-1,0)$ και $\eta\mu(4-\kappa)\leq 1$

Αν $\eta\mu(4-\kappa)<1$ τότε $f(0)\cdot f(4-\kappa)<0$ και άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,4-κ)
Αν $\eta\mu(4-\kappa)=1$ τότε $f(4-\kappa)=0$ και άρα το 4-κ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.
Σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $f(x)=0$ δηλαδή η εξίσωση $x+\kappa\eta\mu x=4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,4-κ].

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. - ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β.