ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

(ΝΕΟ ΚΑΙ ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x\in R$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να ορίσετε το εύρος R (κύμανση) ενός συνόλου παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ο συντελεστής μεταβολής CV είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

β) Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με $A\subseteq B$, τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A)>P(B)$.

γ) Η διάμεσος ενός δείγματος επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

δ) Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς το x, όταν $x=x_0$.

ε) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή, περίπου το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x}-s,\bar{x}+s\right)$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή και s είναι η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+\alpha}, x\in R, \alpha>0$.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1, 2), να βρείτε το α.

Μονάδες 4

Β2. Για α=3 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη x0=1.

Μονάδες 7

Β3. Για α=3 να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Για α=3 να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Σε ένα κουτί υπάρχουν σφαίρες, άλλες κόκκινου και άλλες μπλε χρώματος. Κάθε σφαίρα φέρει έναν θετικό ακέραιο αριθμό. Το πλήθος των σφαιρών με άρτιο αριθμό είναι λ και το πλήθος των σφαιρών με περιττό αριθμό είναι λ+1.

Α: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει άρτιο αριθμό»

Π: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει περιττό αριθμό»

Κ: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει κόκκινο χρώμα»

Μ: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει μπλε χρώμα».

Δίνεται ότι:

- Η πιθανότητα του ενδεχομένου Π είναι $P(\Pi)=\frac{26}{51}$.

- Η πιθανότητα του ενδεχομένου Μ∩Α είναι $P(M\cap A)=\frac{6}{51}$.

Γ1. α. Να αποδείξετε ότι στο κουτί υπάρχουν συνολικά 51 σφαίρες (μονάδες 7)

β. Να αποδείξετε ότι στο κουτί υπάρχουν 6 μπλε σφαίρες με άρτιο αριθμό (μονάδες 3).

Μονάδες 10

Γ2. Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $P(K)=\frac{7}{10}P(M)$, τότε

α. να αποδείξετε ότι στο κουτί περιέχονται 30 μπλε και 21 κόκκινες σφαίρες (μονάδες 6)

β. να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι μπλε με περιττό αριθμό (μονάδες 5)

γ. να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι κόκκινη με περιττό αριθμό (μονάδες 4).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Δ

Ρωτήσαμε τις οικογένειες μιας πολυκατοικίας να μας πουν πόσα παιδιά έχει η καθεμιά.

Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών x_i	Οικογένειες v_i
0	1
1	3
2	1
3	2
4	v_5
x_6	1
ΣΥΝΟΛΟ	v

Δ1. Αν η διάμεσος του αριθμού των παιδιών είναι δ=3, να βρείτε τις δυνατές τιμές του μεγέθους ν του δείγματος .

Μονάδες 9

Δ2. Αν ν=12 και η μέση τιμή του αριθμού των παιδιών είναι $\overline{x} = \frac{8}{3}$, τότε

α. να βρείτε την τιμή x6 (μονάδες 5)

β. να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων (μονάδες 2) και το πολύγωνο συχνοτήτων (μονάδα 1).

Τα διαγράμματα να γίνουν με στυλό.

Μονάδες 8

Δ3. Μετά από ένα χρόνο ξαναρωτήσαμε τις ίδιες οικογένειες για το πλήθος των παιδιών της καθεμιάς. Η οικογένεια που δεν είχε παιδιά απέκτησε δίδυμα και μία από τις οικογένειες που είχε ένα παιδί απέκτησε και δεύτερο. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών που προκύπτει από τις νέες παρατηρήσεις.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 28

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 13

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 92

Α4. **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. f(1)=2 οπότε $\sqrt{1+\alpha}=2 \Leftrightarrow 1+\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=3$.

Β2. Για α=3 είναι $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}(x^2+3)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

- $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+3}}=\frac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση $y=f'(1)x+\beta$ ή $y=\frac{1}{2}x+\beta$ και επειδή διέρχεται από το Α.

Έχουμε $2=\frac{1}{2}\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Άρα $\boxed{y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

Β3. Για α=3 έχουμε f΄(x)=0 ή $\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Το πρόσημο της f΄ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘	ελ.	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Στο x=0 η f παρουσιάζει ελάχιστο το f(0)=$\sqrt{0+3}=\sqrt{3}$

Β4. Για α=3 έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Το σύνολο των σφαιρών στο κουτί είναι λ+λ+1=2λ+1.

Έστω x οι κόκκινες και y οι μπλε σφαίρες στο κουτί.

Οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Π, Κ, Μ είναι

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\lambda}{2\lambda+1},\ P(\Pi)=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}=\frac{\lambda+1}{2\lambda+1},$$

$$P(K)=\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{x}{2\lambda+1},\ P(M)=\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{y}{2\lambda+1}.$$

Γ1. α) $P(\Pi)=\frac{26}{51}$ τότε $\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}=\frac{26}{51}\Leftrightarrow 52\lambda+26=51\lambda+51\Leftrightarrow\lambda=25$

Οπότε στο κουτί υπάρχουν N(Ω)=$2\cdot 25+1$=51 σφαίρες.

β) Οι παραπάνω πιθανότητες γίνονται $P(A)=\frac{25}{51}$, $P(\Pi)=\frac{26}{51}$,

$P(K)=\frac{x}{51}$, $P(M)=\frac{y}{51}$ και $\boxed{x+y=51}$ (1)

$$P(M\cap A)=\frac{6}{51}\Leftrightarrow\frac{N(M\cap A)}{N(\Omega)}=\frac{6}{51}\Leftrightarrow\frac{N(M\cap A)}{51}=\frac{6}{51}\Leftrightarrow N(M\cap A)=6$$

Άρα 6 μπλε σφαίρες με άρτιο αριθμό βρίσκονται στο κουτί.

Γ2. α) Είναι $P(K)=\frac{7}{10}P(M)\Leftrightarrow\frac{x}{51}=\frac{7}{10}\cdot\frac{y}{51}\Leftrightarrow\boxed{10x=7y}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε

$$\left.\begin{aligned}x+y&=51\\10x&=7y\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}y&=51-x\\10x&=7(51-x)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}y&=51-x\\10x&=357-7x\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}y&=51-x\\17x&=357\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}y&=51-21=30\\x&=21\end{aligned}\right\}$$

Άρα στο κουτί υπάρχουν 21 κόκκινες και 30 μπλε σφαίρες.

β) Από τις 30 μπλε σφαίρες που έχει συνολικά το κουτί οι 6 είναι με άρτιο αριθμό οπότε μπλε σφαίρες με περιττό αριθμό είναι 24.

Άρα $P(M\cap\Pi)=\frac{24}{51}=\frac{8}{17}$.

γ) Οι σφαίρες με περιττό αριθμό είναι 26.

Οι 24 από αυτές είναι μπλε οπότε οι υπόλοιπες 26-24=2 είναι κόκκινες με περιττό αριθμό.

Άρα $P(K\cap\Pi)=\frac{N(K\cap\Pi)}{N(\Omega)}=\frac{2}{51}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $1+3+1+2+\nu_5+1=\nu\Leftrightarrow 8+\nu_5=\nu$.

1η περίπτωση: $0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{μεσαία} \\ \text{παρατήρηση}}}{\boxed{3}},\ 3,\ \underbrace{4,\ \dots,\ 4,}_{\nu_5 \text{ φορές}}\ x_6$

Έστω δ=3 οπότε πρέπει $5=1+\nu_5+1$

$$5=2+\nu_5 \text{ άρα } \nu_5=3$$

Οπότε $\nu=8+3=11$

2η περίπτωση: $0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{μεσαία} \\ \text{παρατήρηση}}}{\boxed{3}},\ \underbrace{4,\ \dots,\ 4,}_{\nu_5 \text{ φορές}}\ x_6$

Έστω δ=3 οπότε $6= \nu_5+1 \Leftrightarrow \nu_5=5$

Οπότε $\nu=8+5=13$

3η περίπτωση: $0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{μεσαίες} \\ \text{παρατηρήσεις}}}{\boxed{3,\ 3}},\ \underbrace{4,\ \dots,\ 4,}_{\nu_5 \text{ φορές}}\ x_6$

Έστω δ=3 οπότε $5= \nu_5+1 \Leftrightarrow \nu_5=4$

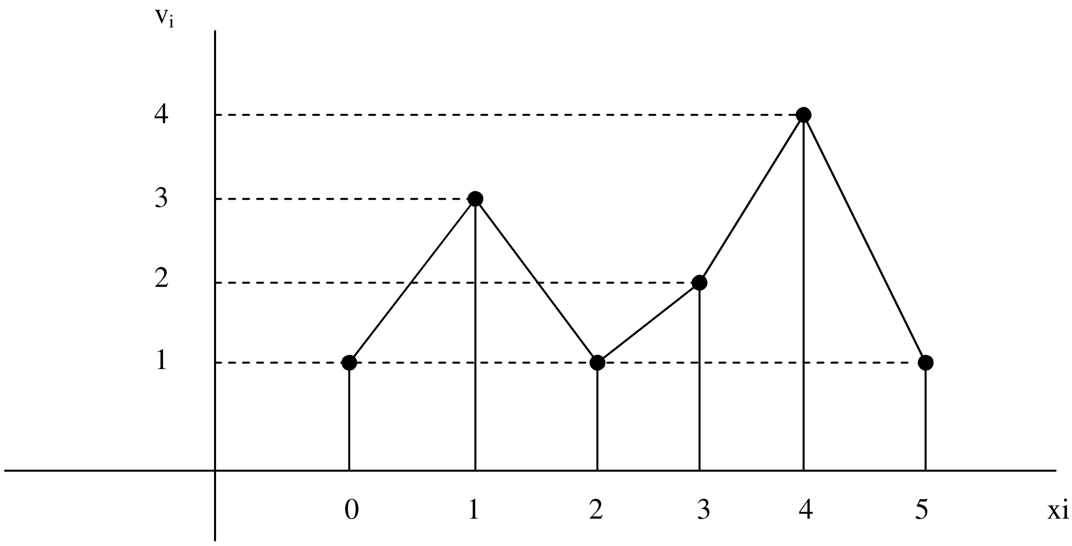
Οπότε $\nu=8+4=12$

Δ2. α) Αν $\nu=12$ τότε $\nu_5=4$ και έχουμε

Αριθμός παιδιών x_i	Οικογένειες ν_i	$x_i\nu_i$
0	1	0
1	3	3
2	1	2
3	2	6
4	4	16
x_6	1	x_6
ΣΥΝΟΛΟ	12	$27+ x_6$

Οπότε $\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} \Leftrightarrow \frac{8}{3} = \frac{27 + x_6}{12} \Leftrightarrow 81 + 3x_6 = 96 \Leftrightarrow 3x_6 = 15$ άρα $x_6=5$.

β)



Δ3. Είναι

Αριθμός παιδιών x_i	Οικογένειες v_i	$x_i v_i$
0	0	0
1	2	2
2	3	6
3	2	6
4	4	16
5	1	5
ΣΥΝΟΛΟ	12	35

Οπότε $\bar{x}' = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{35}{12}$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΚΑΙ «ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr