ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 8

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\beta^\alpha f(x)\,dx > 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \qquad \text{με } \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$

για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt, \quad x \in [0, 1].$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) \cdot G(x) > F(x)$, για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\dfrac{F(x)}{G(x)} \leq \dfrac{F(1)}{G(1)}$, για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right) \cdot x^5}$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο:

Α.1 Σχολικό βιβλίο απόδειξη σελ. 98

Α.2 Σχολικό βιβλίο, ορισμός, σελ. 141

Α.3 Σχολικό βιβλίο, ορισμός, σελ. 280

Β.
α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο:

α. Είναι $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i},\ \alpha\in R$

Έχουμε $|z|=\left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right|=\dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|}=\dfrac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}}=1$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

β. Για α=0 έχουμε $z_1=\dfrac{2+0i}{0+2i}=\dfrac{1}{i}=-i$

Για α=2 έχουμε $z_2=\dfrac{2+2i}{2+2i}=1$

i. Αν M_1,M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z_1,z_2 αντίστοιχα τότε $(M_1,M_2)=|z_1-z_2|=|-i-1|=|1+i|=\sqrt{2}$.

ii. Για κάθε φυσικό αριθμό ν έχουμε:

$(z_1)^{2\nu}=(-i)^{2\nu}=i^{2\nu}=[i^2]^\nu=(-1)^\nu$
$(-z_2)^\nu=(-1)^\nu$
Άρα $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^\nu$

ΘΕΜΑ 3ο:

Έχουμε $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$, $\theta\in IR$ με $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$.

α. Η f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με

$f'(x)=3x^2-3$ και $f''(x)=6x$

- Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$. Το πρόσημο της f′, η μονοτονία και τα ακρότατα της f, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Για $x=-1$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=2-2\eta\mu^2\theta$.

Για $x=1$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)=-2-2\eta\mu^2\theta$.

- Έχουμε $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Το πρόσημο της f″, η κυρτότητα και το σημείο καμπής της C_f, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

Για $x=0$, η f παρουσιάζει καμπή και το σημείο $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$ είναι το σημείο καμπής της C_f.

β.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ οπότε

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\quad f(-1)\right]=\left(-\infty, 2-2\eta\mu^2\theta\right]$$

αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

Επειδή $0\in f(\Delta_1)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[-1, 1]$

  οπότε $f(\Delta_2)=[f(1), f(-1)]=[-2-2\eta\mu^2\theta, 2-2\eta\mu^2\theta]$

  Επειδή $0\in f(\Delta_2)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3=[1, +\infty)$

  οπότε $f(\Delta_3)=\left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[-2-2\eta\mu^2\theta, +\infty)$

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

  Επειδή $0\in f(\Delta_3)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_3.

  Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ. Έχουμε $A(-1, 2-2\eta\mu^2\theta)$

$B(1,-2-2\eta\mu^2\theta)$

$\Gamma(0,-2\eta\mu^2\theta)$

Επειδή οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε) $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$, βρίσκονται πάνω σ' αυτήν.

δ. Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την (ε) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=-2x-2\eta\mu^2\theta$

Οπότε $x^3-3x-2\eta\mu^2\theta=-2x-2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x=-1$ **ή** $x=0$ **ή** $x=1$.

Έχουμε $H(x)=f(x)-(-2x-2\eta\mu^2\theta)=x^3-x$.

Το πρόσημο της Η στο [-1,1] φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	-1		0		1
H(x)		+	0	−	

Άρα

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{0}H(x)dx-\int_{0}^{1}H(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=...=\frac{1}{2}\,\tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4ο:

α. Αφού f γνησίως αύξουσα στο [0,1] τότε $f(x)>f(0)>0$ για κάθε $x\in (0,1]$. Επειδή η $f(t)g(t)$ είναι συνεχής στο [0,1], η F είναι παραγωγίσιμη στο [0,1], άρα και συνεχής με $F'(x)=$

$$\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'=f(x)g(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,1].$$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1]. Οπότε $F(x)>F(0)$, για κάθε $x\in(0,1]$.

Δηλαδή $F(x)>0$, για κάθε $x\in(0,1]$.

β. Για $x\in(0,1]$ και $0 \le t \le x \le 1$ έχουμε $f(t) \le f(x)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1].

Επειδή $g(t) > 0$ για κάθε $t\in[0,1]$ τότε $f(t)g(t) \le f(x)g(t)$, για κάθε $t\in[0,1]$.

Έστω $h(t) = f(x)g(t) - f(t)g(t) = g(t)(f(x)-f(t))$, $t\in[0,x]$

Η h είναι συνεχής στο [0,x] με $h(t) \ge 0$ για κάθε $t\in[0,x]$ και αφού η h δεν είναι παντού μηδέν στο [0,x] τότε

$$\int_0^x h(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x \big(f(x)g(t)-f(t)g(t)\big)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(x)g(t)dt - \int_0^x f(t)g(t)dt > 0 \Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)dt > \int_0^x f(t)g(t)dt \Leftrightarrow$$

$f(x)G(x)>F(x)$ για κάθε $x\in(0,1]$.

γ. Θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$, $x\in(0,1]$.

Αφού g συνεχής στο [0,1] τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο [0,1] άρα και συνεχής με $G'(x)=g(x)>0$, για κάθε $x\in(0,1]$.

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1] οπότε $G(x)>G(0)$, για κάθε $x\in(0,1]$, δηλαδή $G(x)>0$, για κάθε $x\in(0,1]$, άρα $G(x) \neq 0$, $x\in(0,1]$.

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο (0,1] με

$$\Phi'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)g(x)G(x)-F(x)g(x)}{G^2(x)}=\frac{g(x)\big(f(x)G(x)-F(x)\big)}{G^2(x)}>0, \text{ για κάθε } x\in(0,1]$$

αφού $g(x)>0$ και $f(x)G(x)-F(x)>0$, για κάθε $x\in(0,1]$.

Άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$.

Επομένως $\Phi(x)\leq\Phi(1)$, για κάθε $x\in(0,1]$.

Δηλαδή $\dfrac{F(x)}{G(x)}\leq\dfrac{F(1)}{G(1)}$, για κάθε $x\in(0,1]$.

δ. Αφού F συνεχής στο $x_o=0$, τότε $\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^x f(t)g(t)dt=F(0)=0$. Ομοίως, G συνεχής στο $x_o=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^x g(t)dt=G(0)=0$.

Έχουμε $$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)x^5}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\right]=f(0)\cdot0=0$$

Εφόσον

- $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$$

- $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)'}{\left(x^5\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x^4\left(x^2\right)'}{5x^4}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot\frac{2x}{5}=1\cdot0=0$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu x^4}{x^4}\overset{u=x^4}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$