

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΤΡΙΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2007
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8

B.α. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 3

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

Μονάδες 2

β. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Μονάδες 2

γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x=x_0$ ελάχιστο.

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = x^v, \text{ όπου } v \text{ φυσικός}$$

$$f_2(x) = \ln x, \text{ όπου } x > 0$$

$$f_3(x) = \sqrt{x}, \text{ όπου } x > 0$$

$$f_4(x) = \sin x, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός.}$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$

Μονάδες 10

β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω :

$$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}, B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$$

όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω , δηλαδή οι $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$.

Μονάδες 7

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$.

Μονάδες 8

γ. Για $x=-1$ να δειχθεί ότι:

$$P(A) = \frac{5}{11}, \quad P(B) = \frac{7}{11}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{11}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(A \cup B^c)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε δύο δείγματα A και B με παρατηρήσεις:

Δείγμα A: 12, 18, t_3, t_4, \dots, t_{25}

Δείγμα B: 16, 14, t_3, t_4, \dots, t_{25} .

Δίνεται ότι $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$.

α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές \bar{x}_A και \bar{x}_B των δύο δειγμάτων A και B αντίστοιχα είναι $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$.

Μονάδες 7

β. Αν s_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος A και s_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος B, να αποδείξετε ότι $s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}$.

Μονάδες 8

γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με $CV_A = \frac{1}{15}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV_B του δείγματος B.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Σχολικό βιβλίο, Σελ. 152, Απόδειξη 5

B. α. Σχολικό βιβλίο, Σελ. 22, Ορισμός
β. Σχολικό βιβλίο, Σελ. 87, Ορισμός

Γ1. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος

Γ2. $f'_1(x) = vx^{v-1}, x \in \mathbb{R}$
 $f'_2(x) = \frac{1}{x}, x > 0$
 $f'_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$
 $f'_4(x) = -\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' + 3' = e^x + xe^x = xe^x + 3 + e^x - 3 = f(x) + e^x - 3$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^x - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\begin{aligned} \alpha. \text{ Είναι } P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5) &= 1 & \eta' \\ P(-1)+P(-1)+P(-1)+P(-1)+\frac{P(-1)}{2}+\frac{P(-1)}{2}+\frac{P(-1)}{2} &= 1 & \Leftrightarrow \\ 4P(-1)+3\frac{P(-1)}{2} &= 1 & \Leftrightarrow \\ P(-1) &= \frac{2}{11} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P(0)=P(1)=P(2)=\frac{2}{11} \text{ και } P(3)=P(4)=P(5)=\frac{1}{11}$$

$$\beta. A=\{1, 3, x^2-x-3\}, \quad B=\{2, x+1, 2x^2+x-2, -2x+1\}$$

$$\text{Για να είναι } A \cap B = \{-1, 3\} \text{ πρέπει } x^2-x-3=-1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \eta' \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Για } x=-1 \text{ είναι } A=\{1, 3, -1\} \text{ και } B=\{2, 0, -1, 3\} \text{ οπότε } A \cap B = \{-1, 3\}$$

$$\text{Για } x=2 \text{ είναι } A=\{1, 3, -1\} \text{ και } B=\{2, 3, 8, -3\} \text{ οπότε } A \cap B = \{3\} \neq \{-1, 3\}$$

Άρα η τιμή $x=2$ απορρίπτεται.

$$\gamma. \quad P(A)=P(-1)+P(1)+P(3)=\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}=\frac{5}{11}$$

$$P(B)=P(-1)+P(0)+P(2)+P(3)=\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}=\frac{7}{11}$$

$$P(A \cap B)=P(-1)+P(3)=\frac{2}{11}+\frac{1}{11}=\frac{3}{11}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)=\frac{5}{11}-\frac{3}{11}=\frac{2}{11}$$

$$P(A \cup B')=P(A)+P(B')-P(A \cap B')=P(A)+1-P(B)-P(A-B)=\frac{5}{11}+1-\frac{7}{11}-\frac{2}{11}=\frac{7}{11}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Δείγμα A: 12, 18, t_3, t_4, \dots, t_{25}
 B: 16, 14, t_3, t_4, \dots, t_{25}

Επειδή $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$

$$\bar{x}_A = \frac{12+18+t_3+t_4+\dots+t_{25}}{25} = \frac{12+18+345}{25} = \frac{375}{25} = 15$$

$$\bar{x}_B = \frac{16+14+t_3+t_4+\dots+t_{25}}{25} = \frac{16+14+345}{25} = \frac{375}{25} = 15$$

οπότε $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$

$$\beta. S_A^2 = \frac{1}{25} \left[(12-15)^2 + (18-15)^2 + (t_3-15)^2 + \dots + (t_{25}-15)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{25} \left[9+9 + \sum_{i=3}^{25} (t_i-15)^2 \right] = \frac{1}{25} \left[18 + \sum_{i=3}^{25} (t_i-15)^2 \right]$$

$$S_B^2 = \frac{1}{25} \left[(16-15)^2 + (14-15)^2 + (t_3-15)^2 + \dots + (t_{25}-15)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{25} \left[(16-15)^2 + (14-15)^2 + \sum_{i=3}^{25} (t_i-15)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{25} \left[2 + \sum_{i=3}^{25} (t_i-15)^2 \right]$$

$$\text{Οπότε } S_A^2 - S_B^2 = \frac{1}{25} (18 - 2) = \frac{16}{25}$$

$$\gamma. CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} \Leftrightarrow \frac{1}{15} = \frac{S_A}{15} \text{ άρα } S_A = 1$$

$$\text{Ισχύει } S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25} \text{ οπότε } 1 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow S_B^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow S_B = \frac{3}{5}$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{5}}{15} = \frac{3}{75} = \frac{1}{25}$$