ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1Ο

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|, \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$f^{-1}(f(x))=x, x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y, y\in f(A)$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma \in \Re$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και στρέφει τα κοίλα της προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκην θα ισχύει

$$f''(x)>0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$\left|(i+2\sqrt{2})z = 6\right|$ και $|w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

ε. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο των τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 9

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x),$$

για κάθε x>0

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dx - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για μια συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και η συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$$

και g(0)=g΄(0)=1, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+^{x3+}x+1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α.1 Σχολικό βιβλίο Σελίδα 235

Α.2 Σχολικό βιβλίο σελίδα 191

Β. ***α.*** Σ **β.** Σ ***γ.*** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

Θέμα 2ο

α. Έχουμε $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \Leftrightarrow \left|i+2\sqrt{2}\right||z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\,|z|=6 \Leftrightarrow 3|z|=6 \Leftrightarrow |z|=2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο Ο(0 ,0) και ακτίνα ϱ = 2.

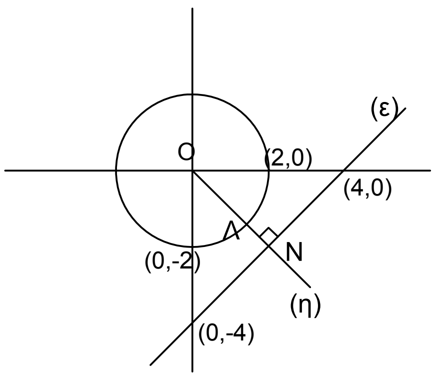
β. Έχουμε $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w , είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, όπου Α(1, –1) και
Β(3,–3) . Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{-3+1}{3-1}=-1$. Οπότε $\lambda_{\varepsilon}=1$. Άρα $(\varepsilon): y+2=1(x-2) \Leftrightarrow y=x-4 \Leftrightarrow x-y-4=0$.

<u>Β΄ Τρόπος</u>

Θέτοντας $w=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$ και αντικαθιστώντας στην αρχική καταλήγουμε στην $(\varepsilon): x-y-4=0$

γ. $|w|_{min}=d(O,\varepsilon)=\dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

δ.



Αν η διακεντρική ευθεία (η) που είναι κάθετη στην (ε) τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ, και την (ε) στο σημείο Ν, τότε:

$$|z-w|_{min}=(\mathrm{\Lambda N})=(\mathrm{ON})-(\mathrm{O\Lambda})=|w|_{min}-\rho=2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Θέμα 3ο

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

α. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0=f(0)$

Άρα η f συνεχής στο $x_0=0$

β. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$

Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}$

Το πρόσημο της f', και η μονοτονία της f, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0 $\quad$ e^{-1} $\quad$ $+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Η f γνησίως φθίνουσα στο $A_1=[0,e^{-1})$ και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left[e^{-1},+\infty\right)$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$

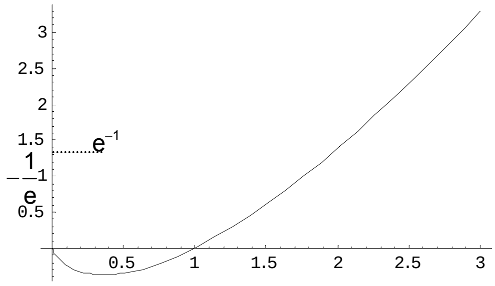
Αφού f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_1 τότε $f(A_1)=\left[f\left(e^{-1}\right),f(0)\right]=\left[-\frac{1}{e},0\right]$.

Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_2 τότε $f(A_2)=\left[f\left(e^{-1}\right),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

γ. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $x=e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x}\Leftrightarrow x\ln x=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης είναι το ίδιο με το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία y = α.



- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη
- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{e}$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x = e^{-1}$
- Αν $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες, μια στο $(0, e^{-1})$ και μια στο $(e^{-1}, 1)$
- Αν α = 0 τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα την x = 1
- Αν $\alpha \in (0, +\infty)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα στο $(1, +\infty)$

δ. Η συνάρτηση $f(t) = t\ln t$, είναι συνεχής στο $[x, x+1]$, παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με
x > 0, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x)$. Επειδή $f''(t) = \frac{1}{t} > 0$, για κάθε $t \in (0, +\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, και αφού $0 < \xi < x+1$ τότε $f'(\xi) < f'(x+1)$ δηλαδή $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε x > 0

Θέμα 4ο

α) Έχουμε $f(x)=\left(10x^3+3x\right)\int_0^2 f(t)dt-45$

οπότε $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left[\left(10x^3+3x\right)\int_0^2 f(t)dt-45\right]dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(t)dt\left[10\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^2-\left[45x\right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(t)dt=46\int_0^2 f(t)dt-90 \Leftrightarrow \int_0^2 f(t)dt=2$$

Άρα $f(x)=20x^3+6x-45, x\in\mathbb{R}$

β. Είναι $g''(x)=\lim\limits_{u\to 0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u}\overset{u=-h}{=}\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x-h)-g'(x)}{-h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$

γ. i) Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]=$$

$=\frac{1}{2}\left(g''(x)+g''(x)\right)=g''(x)$. Άρα

$$g''(x)=f(x)+45 \Leftrightarrow g''(x)=20x^3+6x \Leftrightarrow \left(g'(x)\right)'=\left(5x^4+3x^2\right)'.$$

Άρα υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ ώστε $g'(x)=5x^4+3x^2+c_1, x\in\mathbb{R}$. Επειδή $g'(0)=1$, τότε $c_1=1$.

Άρα $g'(x)=5x^4+3x^2+1$ ή $g'(x)=\left(x^5+x^3+x\right)'$.

Οπότε υπάρχει $c_2\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=x^5+x^3+x+1, x\in\mathbb{R}$ και αφού g(0) = 1 τότε $c_2=1$. Επομένως $g(x)=x^5+x^3+x+1, x\in\mathbb{R}$

ii) Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως η g είναι 1 – 1 .

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ: ΒΑΖΟΥΡΑ Ε., ΚΟΥΣΗΣ Π., ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ., ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β., ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.