

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$.

Μονάδες 8

B. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 2

β. Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2008

γ. Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 2

δ. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0.$$

Μονάδες 2

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου

x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x) = 2 - x$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Για δύο τύπους μπαταριών A και B επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου A και μιας μπαταρίας τύπου B.

Μονάδες 5

- β. Αν μια μπαταρία τύπου A στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου B στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Μονάδες 5

- γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

Μονάδες 7

- δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών A και B παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι $\sqrt{11} \cong 3,3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

Μονάδες 7

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β». Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

Μονάδες 9

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x.$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

B. Σχολικό βιβλίο σελίδα 96

Γ. α. Λ, β. Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ

Θέμα 2ο

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

β. Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$ οπότε $e^x f'(x) = e^x \frac{2-x}{e^x} = 2-x$

γ. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+		-
f	↗		↘

Στο $x = 2$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(2) = \frac{1}{e^2}$

Θέμα 3ο

$$\alpha. \bar{x}_A = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22 \text{ χιλ. ώρες}$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ χιλ. ώρες}$$

β. Θα υπολογίσουμε το μέσο κόστος ανά ώρα .

$$\text{Μέσο κόστος ανά ώρα μπαταρίας A} = \frac{38}{22000} = 0,0017 \text{ ευρώ}$$

$$\text{Μέσο κόστος ανά ώρα μπαταρίας B} = \frac{40}{24000} = 0,0016 \text{ ευρώ}$$

Άρα θα συμφέρει να αγοράσουμε μια μπαταρία τύπου B γιατί παρουσιάζει μικρότερο μέσο κόστος ανά ώρα

$$\gamma. s_A^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\text{άρα } s_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{και } s_B^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

$$\text{Άρα } s_B = \sqrt{22}$$

$$\delta. CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{1}{11}\sqrt{2} = 0,09\sqrt{2}$$

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{22}}{24} = \frac{\sqrt{11}}{24}\sqrt{2} = \frac{3,3}{24}\sqrt{2} = 0,1375\sqrt{2}$$

Επειδή $CV_A < CV_B$ ο τύπος A παρουσιάζει την μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Θέμα 4^ο

Έστω A: ‘το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να διαβάζει την εφημερίδα α’
και B: ‘το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να διαβάζει την εφημερίδα β’

Είναι $P(A) = \frac{50}{100}$ και $P(A \cap B') = P(A - B) = \frac{30}{100}$ οπότε

$$P(A) - P(A \cap B) = \frac{30}{100} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{20}{100}$$

$$\alpha. P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2008

β. Επειδή $A \cap B \subseteq B$ τότε $P(A \cap B) \leq P(B)$ δηλαδή $\frac{1}{5} \leq P(B)$ (1)

Επειδή $B \subseteq A' \cup B$ τότε $P(B) \leq P(A' \cup B)$ δηλαδή $P(B) \leq \frac{7}{10}$ (2)

Από 1, 2 έχουμε: $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$

γ. Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$

Το τριώνυμο $f'(x)$ έχει $\Delta = 1 - 12P(B)$

Από β έχουμε:

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10} \Leftrightarrow -\frac{12}{5} \geq -12P(B) \geq -\frac{84}{10} \Leftrightarrow -\frac{84}{10} \leq -12P(B) \leq -\frac{12}{5} \Leftrightarrow -\frac{74}{10} \leq 1 - 12P(B) \leq -\frac{7}{5}$$

δηλαδή $\Delta < 0$. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όποτε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

ΒΑΖΟΥΡΑ Ε., ΚΟΥΣΗΣ Π., ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ., ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ., ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε., ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.