

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$ να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

B. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Μονάδες 2

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=a$, $x=b$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

B. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

Μονάδες 8

B. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 5

Γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (1, 2)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο:

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x) = \int_0^x tf(t)dt$, $x \in [0, 2]$,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$, $0 < x < 2$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$, $0 < x < 2$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο σελίδα 251

B. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο σελίδα 213

Γ. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

A. α. Αν $M(x,y)$ η εικόνα του z τότε: $x = 2\lambda + 1$ και

$$y = 2\lambda - 1 \text{ οπότε } \lambda = \frac{x-1}{2} \text{ και } \lambda = \frac{y+1}{2} \text{ άρα } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow \varepsilon: y = x - 2$$

β. Η εικόνα του z_0 που έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο είναι το ίχνος K της κάθετης από την αρχή των αξόνων στην (ε) .

$\lambda_{\text{OK}} = -1$ οπότε OK: $y = -x$. Έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = x - 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ x - 2 = -x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1 \end{array} \right\}. \text{ Άρα } K(1,-1) \text{ οπότε } z_0 = 1 - i$$

γ. Αν $w = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε:

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 12 = 1 \text{ και } \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \text{ και } \beta = 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -4 \text{ ή } \alpha = 3 \text{ και } \beta = 1$$

$$\text{Οπότε } w = -4 + i \text{ ή } w = 3 + i$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Για $x > -1$ έχουμε: $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ άρα στο $x = 0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

$$\text{Η } f \text{ παραγωγίσιμη στο } (-1, +\infty) \text{ με } f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - \frac{1}{x+1}$$

Στο $x = 0$ εσωτερικό σημείο του $(-1, +\infty)$ η f παρουσιάζει ελάχιστο και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Άρα σύμφωνα με το Θ. Fermat ισχύει:

$$f'(0) = 0 \text{ οπότε } \alpha^0 \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

B. α. Για $\alpha = e$ έχουμε:

$$f(x) = e^x - \ln(x+1), x > -1 \text{ οπότε } f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}, x > -1 \text{ και}$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}, x > -1 \text{ και επειδή } f''(x) > 0 \text{ για κάθε}$$

$x > -1$ η f κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

β. Επειδή f κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.

Έχουμε $f'(0) = 0$.

Για $-1 < x < 0$: $f'(x) < f'(0) = 0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$.

Για $x > 0$: $f'(x) > f'(0) = 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

γ. Για κάθε $x \in (1, 2)$ έχουμε:

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(f(\beta) - 1) + (x - 1)(f(\gamma) - 1) = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = (x - 2)(f(\beta) - 1) + (x - 1)(f(\gamma) - 1), x \in [1, 2]$$

g συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική

$$g(1) = 1 - f(\beta) < 0$$

$g(2) = f(\gamma) - 1 > 0$, αφού $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ και άρα η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

ΘΕΜΑ 4

α. Αφού $tf(t)$, $f(t)$ συνεχείς στο $[0, 2]$ οι συναρτήσεις $H(x) = \int_0^x tf(t)dt$ και

$$\int_0^x f(t)dt \text{ είναι παραγωγίσιμες στο } [0, 2] \text{ και άρα συνεχείς στο } [0, 2]$$

H G συνεχής στο $(0, 2]$ ως πράξεις των συνεχών συναρτήσεων

$$\frac{H(x)}{x}, \int_0^x f(t)dt, 3$$

Στο $x = 0$:

$$G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - t^2)}{t^2 (1 + \sqrt{1 - t^2})} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} \stackrel{0_{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x f(x)}{1} = 0 f(0) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right) = 3 = G(0)$$

Οπότε G συνεχής στο $x_0 = 0$. Άρα G συνεχής στο $[0, 2]$

β. Για κάθε $x \in (0, 2)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right)' = \frac{H'(x)x - H(x)}{x^2} - f(x) = \\ &= \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = f(x) - \frac{H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2} \end{aligned}$$

γ. G συνεχής στο $[0, 2]$

G παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$

$$G(0) = 3$$

$$G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t) dt + 3 = 3$$

$$\text{Αφού } \int_0^2 (t - 2) f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 t f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 t f(t) dt = 2 \int_0^2 f(t) dt \Leftrightarrow H(2) = 2 \int_0^2 f(t) dt$$

Άρα σύμφωνα με το Θ . Rolle υπάρχει $\alpha \in (0, 2)$ ώστε

$$G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$$

δ. G συνεχής στο $[0, \alpha]$

G παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο

$$\text{ώστε: } G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{-\int_0^{\alpha} f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \int_0^{\xi} t f(t) dt = \xi^2 \int_0^{\alpha} f(t) dt$$

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» Φλωρόπουλου.

Γιοράν Π. - Κούσης Π. - Σιφναίος Δ. – Φιλιούγλου Β. – Φλωρόπουλος Α.