

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Μονάδες 10

B. Αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n ($k \leq n$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1, 2, \dots, k$.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$$

Μονάδες 2

β. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει ότι

$$A - B = A \cap B'$$

Μονάδες 2

γ. Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ ισχύει ότι $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$

Μονάδες 2

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 2

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i=1,2,3,4$ μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες v_i , $i=1,2,3,4$. Η συχνότητα v_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2=3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x}=4$.

x_i	v_i
2	6
3	;
5	3
8	4

α. Να αποδείξετε ότι $v_2=7$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

Μονάδες 9

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{4,9} \approx 2,2$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+ax-7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι $a=9$

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2-1}$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2$, $x>0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 6

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(3)$ και $f(5)$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, ναδειχθεί ότι

$$R=3+\ln\frac{1}{4} \text{ και } \delta=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

Μονάδες 7

β. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τις τιμές στο δειγματικό χώρο Ω , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A=\{\lambda\in\Omega\mid R+\delta<-2\}$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 150

B. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 65

Γ. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

α.

x_i	v_i	$x_i v_i$
2	6	12
3	v_2	$3v_2$
5	3	15
8	4	32
	$v = 13 + v_2$	$59 + 3v_2$

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i, 4 = \frac{59 + 3v_2}{13 + v_2} \Leftrightarrow 4(13 + v_2) = 59 + 3v_2 \Leftrightarrow v_2 = 7$$

β.

x_i	v_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
2	6	12	4	24
3	7	21	9	63
5	3	15	25	75
8	4	32	64	256
	$v = 20$	80		418

$$\text{Άρα } s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right] = \frac{1}{20} \left[418 - \frac{80^2}{20} \right] = 4,9 \Leftrightarrow s = 2,2$$

$$\gamma) CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,2}{4} = 0,55 > 0,10. \text{ (Ανομοιογενές)}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. $f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha, x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 6x - 12, x \in \mathbb{R}$

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \text{ άρα } 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 + \alpha - 9 = 3x^2$$

Οπότε: $\alpha = 9$

$$\begin{aligned}\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{(x+1)} = -3\end{aligned}$$

γ. Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε:

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = -5$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(2, -5)$ θα είναι:

$\varepsilon: y = f'(2)x + \beta$ δηλαδή $y = -3x + \beta$. Το A ανήκει στη (ε) άρα

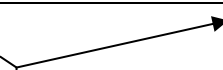
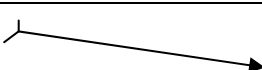
$$-5 = -3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1. \text{ Οπότε } \varepsilon: y = -3x + 1$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$A. \alpha. f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0, (\text{αφού } x > 0) \Leftrightarrow x < 2$$

x	0	2	$+\infty$
f'		+	-
f			

Η f γνησίως αύξουσα στο $(0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

β. Η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2 το $f(2) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$

B. α. Στο $[2, +\infty)$ η f γνησίως φθίνουσα.

Αφού $2 < 3 < 4 < 5 < 8$ θα έχουμε $f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$ ή $f(8) < f(5) < f(4) < f(3) < f(2)$

$$\text{Άρα } R = f(2) - f(8) =$$

$$(\ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1) - (\ln 8 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2) = \ln 2 - \ln 8 + 3 =$$

$$= \ln \frac{2}{8} + 3 = \ln \frac{1}{4} + 3$$

Αφού $v = 5$ (περιττός αριθμός) διάμεσος θα είναι η μεσαία παρατήρηση.

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \delta = f(4) = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

β. Η $R + \delta < -2$ ισοδύναμα γράφεται:

$$\ln \frac{1}{4} + 3 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2$$

$$-\ln 4 + 3 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 < 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$$

λ	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$\lambda^2 - 6\lambda + 5$		+	-	+

Άρα $\lambda \in (1, 5)$ και $\lambda \in \Omega$. Συνεπώς $\lambda = 2$ ή 3 ή 4

Επομένως $A = \{2, 3, 4\}$.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100}, (\text{ισοπίθανα ενδεχόμενα})$$

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» Φλωρόπουλου.

Γιοράν Π. - Κούσης Π. - Σιφναίος Δ. – Φιλιόγλου Β. – Φλωρόπουλος Α.