ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in R$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in R$$

Μονάδες 6

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β),

όπου Α=$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και Β=$\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$

δ) (συνx)΄=ημx, x $\in$ R

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{2}{z}=2$ όπου $z\in C$ με $z\neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$$

Μονάδες 6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$\left|w-4+3i\right|=\left|z_1-z_2\right|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3 \le |w| \le 7$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in R$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R→R η οποία για κάθε x∈R ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x$$

$$f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}, x\in R$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x\in R$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}, x\in R$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \text{ για κάθε } \chi\in R$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Θεώρημα Σχολικό βιβλίο σελίδα 304

Α2

Ορισμός Σχολικό βιβλίο σελ 279

Α3. Ορισμός σχολικό βιβλίο Σελίδα 273

Α4. α) Σ , β) Σ , γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

Θέμα Β

Β1. $z^2+2=2z \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$

$\Delta=-4$ οπότε $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2. $(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left[(1+i)^2\right]^{1005}+\left[(1-i)^2\right]^{1005}=$

$=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=0$

Β3. $|w-4+3i|=2$ κύκλος με κέντρο Κ(4, –3) και ακτίνα ρ = 2

Β4. $|w|=|(w-4+3i)+(4-3i)|$

$\big||w-4+3i|-|4-3i|\big|\le|w|\le|w-4+3i|+|4-3i| \Leftrightarrow$

$|2-5|\le|w|\le 2+5 \Leftrightarrow 3\le|w|\le 7$

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>0 \text{ για κάθε } x\in R$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο R

Γ2. $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow$

$2x^2-6x+4=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right) \Leftrightarrow$

$2x^2+\ln\left(x^4+1\right)=2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow$

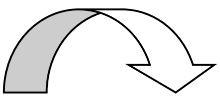
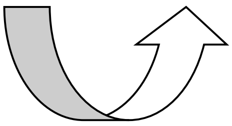
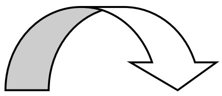
$$f\left(x^2\right)=f\left(3x-2\right)\overset{f\,'1-1'}{\Leftrightarrow} x^2=3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow$$
$x=1$ ή $x=2$

(Η f είναι ‘1-1’ αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$)

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f''\left(x\right)=\dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

$f''\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

Το πρόσημο της f'', η κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής της C_f φαίνονται στο παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$\quad$ 1	$\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
f(x)			

ΣΚ $\qquad$ ΣΚ

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-1\right]$ και $\left[1,+\infty\right)$

Η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[-1,1\right]$

Τα σημεία Α(–1,ln2 – 2) και Β(1, ln2 + 2) είναι σημεία καμπής της C_f

Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο σημείο Α έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: y-f\left(-1\right)=f'\left(-1\right)\left(x+1\right) \Leftrightarrow y=x+\ln 2-1$$

Η εφαπτομένη ε_2 της C_f στο σημείο Β έχει εξίσωση

$$\varepsilon_2: y-f\left(1\right)=f'\left(1\right)\left(x-1\right) \Leftrightarrow y=3x+\ln 2-1$$

Η ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται στο σημείο Γ(0, ln2 – 1) του άξονα $y'y$

Γ4.

$$I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1} 2x^2dx+\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx=\left[2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+0=\frac{4}{3}.$$

Αφού:

αν $J=\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$ και θέσουμε $u=-x$ τότε $du=-dx$

Για x = –1 : u = 1

Για x = 1: u = –1

Τότε $J=-\int_{1}^{-1}\left(-u\ln(u^2+1)\right)du=-\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx=-J$

Οπότε $2J=0 \Leftrightarrow J=0$

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε $f(x)=x+3+\int_{0}^{x}\frac{t}{f(t)-t}dt$ (1)

Η συνάρτηση $h(t)=\frac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση $\int_{0}^{x}\frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x + 3 και $\int_{0}^{x}\frac{t}{f(t)-t}dt$ με

$$f'(x)=1+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}, x\in R$$

Δ2. Η g συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με

$$g'(x)=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=$$

$$=2f'(x)\left[f(x)-x\right]-2f(x)=2f(x)-2f(x)=0, x\in R$$

Άρα η g σταθερή στο $\mathbb{R}$

Δ3. Αφού η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ τότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) = c, x \in \mathbb{R}$ ή $f^2(x) - 2xf(x) = c, x \in \mathbb{R}$

Για x = 0 από την σχέση (1) έχουμε $f(0) = 0$, οπότε c = 9

Άρα $f^2(x) - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$

$\left[f(x) - x\right]^2 = x^2 + 9, x \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $g(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}$ οπότε $g^2(x) = x^2 + 9, x \in \mathbb{R}$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$ (αφού $f(x) \neq x, x \in \mathbb{R}$) τότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $g(0) = 3 > 0$ τότε $g(x) > 0, x \in \mathbb{R}$.

Άρα $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$

Δ4. Έστω G μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ οπότε: $G'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$

Έχουμε: $\int_x^{x+1} f(t)dt = G(x+1) - G(x)$ και

$\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt = G(x+2) - G(x+1)$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την G στα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια ώστε

$$G'(\xi_1) = \frac{G(x+1) - G(x)}{(x+1) - x} = G(x+1) - G(x)$$, οπότε

$f(\xi_1) = \int_x^{x+1} f(t)dt$ και

$$G'(\xi_2) = \frac{G(x+2) - G(x+1)}{(x+2) - (x+1)} = G(x+2) - G(x+1)$$, οπότε

$f(\xi_2) = \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0, x \in R$$

Άρα $f'(x) > 0, x \in R$ οπότε η f γνησίως αύξουσα στο R

Επειδή $\xi_1 < \xi_2$ τότε $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ δηλαδή $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κούσης Π. – Σιφναίος Δ. – Τζωρτζίνης Ι. – Φιλιόγλου Β. – Φλωρόπουλος Α.