

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω t_1, t_2, \dots, t_n οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής

X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή \bar{x} .

Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$.

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

A2. Αν x_1, x_2, \dots, x_n είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και w_1, w_2, \dots, w_n είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ
ΛΥΚΕΙΟΥ**

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0)=f'(t_0)$

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, x \in \mathbb{R}$

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$

Μονάδες 10

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ
ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4

Μονάδες 4

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

A: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), x > P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = \frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα **Δ2** και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B .

Μονάδες 5

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ
ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1.

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v - \bar{x} - \bar{x} - \dots - \bar{x}}{v} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

A2. Ορισμός σελίδα 86 – 87 σχολικού βιβλίου

A3. Ορισμός σελίδα 140 σχολικού βιβλίου

A4. α) Σ , β) Λ, γ) Σ , δ) Λ, ε) Λ

Θέμα Β

B1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4x + 4 - 4}{(x - 1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x(x - 1)}{(x - 1)(2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2} = \frac{4}{4} = 1$$

B2. $f'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} (x^2 - x + 1)' = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}, x \in \mathbb{R}$

Η εφαπτόμενη ε στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό $\lambda = f'(0) = -1$

B3. Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη ε με τον $x'x$ τότε $\lambda = \varepsilon\phi\omega = -1$, οπότε $\omega = 135^\circ$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ
ΛΥΚΕΙΟΥ**

Θέμα Γ

Γ1. Η δεύτερη κλάση είναι: $[c, 2c)$ οπότε $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$

Γ2.

Απώλεια Βάρους σε κιλά	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
$[0, 4)$	2	20	40	80
$[4, 8)$	6	40	240	1440
$[8, 12)$	10	45	450	4500
$[12, 16)$	14	30	420	5880
$[16, 20)$	18	25	450	8100
Σύνολο		160	1600	20000

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} = \frac{1600}{160} = 10 \text{ κιλά}$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right] = \frac{1}{160} \left[20000 - \frac{1600^2}{160} \right] = 25$$

άρα $s = 5$

Γ3. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 0,5 > 0,1$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

$$\text{Γ4. } P(A) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 40 + 45 + \frac{1}{2} \cdot 30}{160} = \frac{10 + 45 + 15}{160} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ
ΛΥΚΕΙΟΥ**

Θέμα Δ

$$\Delta 1. f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} - (x - P(A)) = \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - (x - P(A))^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + P(A) = 0 \text{ ή}$$

$$\text{ή } x = P(A) - 1 < P(A) \text{ απορρίπτεται.}$$

x	P(A)	1 + P(A)	+∞
f'(x)	+		-
f(x)	↗		↘

$$\Delta 2. 1 + P(A) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 - \frac{1}{2} + P(B) = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\Delta 3. P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3}$$

$$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Delta 4. P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Γιοράν Π. – Κούσης Π. – Σιφναίος Δ. –
Τζωρτζίνης Ι.- Φιλιόγλου Β. – Φλωρόπουλος Α.