ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό,*** *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος,*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

δ) $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}, x \in R - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dt = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dt$ όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β]

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad (1)$$
$$|w-5\overline{w}|=12 \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1

Μονάδες 6

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με την εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1\le|z-w|\le4$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος **Γ_2**, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο,

ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)=f(x)+1 με x>0, τον άξονα x΄x και την ευθεία x=e

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:(0,+∞)→R, η οποία για κάθε x>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \dfrac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_{1}^{x} \dfrac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, x>0, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}[(f(x))^2 \eta\mu \dfrac{1}{f(x)} - f(x)]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, x > 0,$$

όπου α>0, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

F(x) + F(3x) > 2F(2x), για κάθε x>0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈(β,2β) τέτοιο ώστε:

F(β) + F(3β) = 2F(ξ)

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου 253
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 191
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 258
Α4. α) Σ , β) Σ, γ) Λ, δ) Λ , ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow$$

$$2|z|^2=2 \Leftrightarrow |z|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1.

Β2. Έχουμε

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=0$$

Έχουμε $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=2$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

Β3. Έστω w =x + yi με $x,y\in\mathbb{R}$.

Έχουμε

$$|w-5\overline{w}|=12 \Leftrightarrow |x+yi-5(x-yi)|=12 \Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow$$

$\sqrt{16x^2+36y^2}=12 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο επίπεδο είναι έλλειψη με τις εστίες της πάνω στον άξονα x΄x και σταθερό άθροισμα 2α = 6.

Έχουμε α = 3, β = 2, οπότε $|w|_{max}=\alpha=3$ και $|w|_{min}=\beta=2$.

Β4. Έχουμε $2\le|w|\le3$

$$|z-w|\le|z|+|w|\le1+3=4$$

$$|z-w|\ge\big||z|-|w|\big|\ge|w|-1\ge1$$

Άρα $1 \le |z-w| \le 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$με

$f'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x}$ και $f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. Επειδή $f''(x) > 0$για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για 0 <x < 1 είναι $f'(x) < f'(1) = 0$

Για x > 1 είναι $f'(x) > f'(1) = 0$

Το πρόσημο και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
f	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x - 1\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x - 1\right] = +\infty$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ τότε $f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [-1,+\infty)$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$ τότε $f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty)$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το

$f((0,+\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1,+\infty)$

Γ2. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$έχουμε

$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012 \quad (1)$

Επειδή η f είναι συνεχής και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και $2012 \in f(\Delta_1)$τότε η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μία ρίζα

$x_1 \in (0,1)$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$ και $2012 \in f(\Delta_2)$ τότε η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα $x_2 \in (1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^x [f(x) - 2012], x \in [x_1, x_2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $h'(x) = e^x (f'(x) + f(x) - 2012)$

$h(x_1) = e^{x_1}[f(x_1) - 2012] = 0$, αφού $f(x_1) = 2012$.

$h(x_2) = e^{x_2}[f(x_2) - 2012] = 0$, αφού $f(x_2) = 2012$.

Οπότε $h(x_1) = h(x_2)$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$τέτοιο ώστε

$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0}[f'(x_0) + f(x_0) - 2012] = 0 \Leftrightarrow$

$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

Γ4. Έχουμε $g(x) = f(x) + 1 = (x-1)\ln x, x \in (0,+\infty)$

Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Επειδή η g συνεχής στο [1,e] και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,e]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e g(x)dx = \int_1^e [(x-1)\ln x]dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \cdot \ln x dx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e = \frac{e^2 - 3}{4} \text{τμ}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και αφού $f(x)\neq 0$ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Θέτουμε $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\dfrac{x-x^2}{e}, x\in(0,+\infty)$

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε η $h(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Η $g_1(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων h(x) και x^2-x+1 . Η $g_2(x)=-\dfrac{x-x^2}{e}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων g_1 και g_2 με

$g'(x)=f\left(x^2-x+1\right)(2x-1)-\dfrac{1}{e}(1-2x),\ x>0$. Έχουμε

$g(x)\geq 0, x\in(0,+\infty)$ και αφού g(1) = 0 τότε $g(x)\geq g(1), x\in(0,+\infty)$.

Άρα η g στο 1(εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$) παρουσιάζει ελάχιστο και αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε από το θεώρημα Fermat έχουμε $g'(1)=0\Leftrightarrow f(1)=-\dfrac{1}{e}<0$. Οπότε η f(x) <0 για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα $\ln x-x=\left(\int_1^x \dfrac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x), x\in(0,+\infty)$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x-x, x\in(0,+\infty)$.

Έχουμε $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{x}, x\in(0,+\infty)$.

Είναι $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow x=1, \varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $\varphi'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

Άρα για x = 1 η φ παρουσιάζει μέγιστο το $\varphi(1)=-1$, οπότε $\varphi(x)\leq\varphi(1)=-1<0$.

Επομένως $\ln x-x<0, x\in(0,+\infty)$.

Από (1) έχουμε $\int_1^x \dfrac{\ln t-t}{f(t)}dt+e=\dfrac{\ln x-x}{f(x)}>0, x\in(0,+\infty)$.

Άρα $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e}, x\in(0,+\infty)$

Η $\varphi(x)=\ln x-x$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων lnx και –x . Επειδή $\dfrac{\ln t-t}{f(t)}$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ τότε $\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και άρα η $K(x)=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων φ και K.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε $\dfrac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ (2)

.Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (2) παίρνουμε

$$\left[\frac{\ln x-x}{f(x)}\right]'=\frac{\ln x-x}{f(x)}, x\in(0,+\infty).$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\dfrac{\ln x-x}{f(x)}=ce^x, x\in(0,+\infty)$.

Για x = 1 προκύπτει c = 1. Οπότε $f(x)=e^{-x}(\ln x-x), x\in(0,+\infty)$.

Δ2. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[e^{-x}(\ln x-x)\right]=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Θέτουμε $u=\dfrac{1}{f(x)}$, επομένως

$$\lim_{x\to0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]=\lim_{u\to0}\left(\frac{\eta\mu u}{u^2}-\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=\frac{1}{2}\cdot0=0$$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$με $F'(x)=f(x), x\in(0,+\infty)$. Έχουμε

$$F''(x)=f'(x)=-e^{-x}(\ln x-x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)=$$

$$=e^{-x}\left(x-1-\ln x+\frac{1}{x}\right)>0, x\in(0,+\infty) \text{αφού } \ln x\le x-1, x\in(0,+\infty).$$

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Η F είναι συνεχής στο $[x,2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,2x)$, οπότε σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1\in(x,2x)$τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\frac{F(2x)-F(x)}{x}$$

Η F είναι συνεχής στο $[2x,3x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2x,3x)$, οπότε σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_2\in(2x,3x)$τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}.$$

Έχουμε $0<\xi_1<\xi_2$ και αφού η F είναι κυρτή $(0,+\infty)$ τότε η F'είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε

$$F'(\xi_1)<F'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(x)}{x}\Leftrightarrow$$

$$F(2x)-F(x)<F(3x)-F(x)\Leftrightarrow$$

$$F(x)+F(3x)>2F(2x), x\in(0,+\infty).$$

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση

$G(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta), x\in(0,+\infty)$.

Έχουμε $G'(x)=2F(x)=2f(x)<0, x\in(0,+\infty)$. Οπότε η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Η G είναι συνεχής στο $[\beta,2\beta]$

$G(\beta)=F(\beta)-F(3\beta)$, επειδή $F'(x)=f(x)<0, x\in(0,+\infty)$, τότε η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και αφού $\beta<3\beta$ θα είναι $F(\beta)>F(3\beta)$, οπότε $G(\beta)>0$.

$G(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$ από Δ3.

Επομένως $G(\beta)\cdot G(2\beta)<0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε $G(\xi)=0\Leftrightarrow F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$, και αφού η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ το ξ είναι μοναδικό.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.