ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$:

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι: $P(A\text{-}B)=P(A)\text{-}P(A\cap B)$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 4

Α3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R=6\overline{x}$.

Μονάδες 2

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Μονάδες 2

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M)=\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A)=4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K)=-5\lambda+\frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in R$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64<N(\Omega)<72$, τότε

Β1. Να δείξετε ότι $N(\Omega)=68$

Μονάδες 6

Β2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

Μονάδες 6

Β4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων fi% έχει διαδοχικές κορυφές τις:

Α(8, 0) Β(10, 10) Γ(12, 20) Δ(14, y_Δ)

Ε(16, y_E) Ζ(18, 10) Η(20, 0)

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

Γ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες 7

Γ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων fi%.

Μονάδες 3

Γ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων fi% της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

Γ4. Η διεύθυνσης της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

Γ5. Το εμβαδόν το χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}, x \in R$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και P(A), P(B) είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες

$P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$.

Μονάδες 8

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}, x \in R$.

α) Να λυθεί η εξίσωση f(x)=h(x).

Μονάδες 3

β) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2x_i + 1$, i=1,2,3 οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 152

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

Α4.

α) Λ , β) Λ , γ) Σ , δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(M)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \mathrm{N}(\Omega)=4\mathrm{N}(\mathrm{M})$

$64<\mathrm{N}(\Omega)<72\Leftrightarrow 64<4\mathrm{N}(\mathrm{M})<72\Leftrightarrow 16<\mathrm{N}(\mathrm{M})<18$ άρα Ν(Μ) = 17 αφού $\mathrm{N}(\mathrm{M})\in N^*$, οπότε Ν(Ω) = 68

Β2. Έχουμε $P(A)+P(K)+P(M)=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0$

Άρα $\lambda=1$ ή $\lambda=\frac{1}{4}$

Για λ = 1 είναι Ρ(Α) = 4 άτοπο

Για $\lambda=\frac{1}{4}$ έχουμε: $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(K)=\frac{1}{2}$.

Οπότε $\lambda=\frac{1}{4}$

Β3. $P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{68}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \mathrm{N}(\mathrm{A})=17$

$P(K)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{N}(\mathrm{K})}{68}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \mathrm{N}(\mathrm{K})=34$

Άρα υπάρχουν: 17 άσπρες, 17 μαύρες και 34 κόκκινες σφαίρες

Β4. $P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων σχηματίστηκε ενώνοντας τα μέσα των άνω βάσεων του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων.

Το πλάτος c = 2 των κεντρικών τιμών ισούται με το πλάτος των κλάσεων, οπότε τα άκρα των κλάσεων θα είναι σε απόσταση $\pm\frac{c}{2}=\pm1$ από κάθε κεντρική τιμή.

Γ1. Έχουμε $f_1\%=10, f_2\%=20, f_3\%=y_\Delta, f_4\%=y_E, f_5\%=10$. Επειδή ΔΕ παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα , $y_\Delta=y_E$.

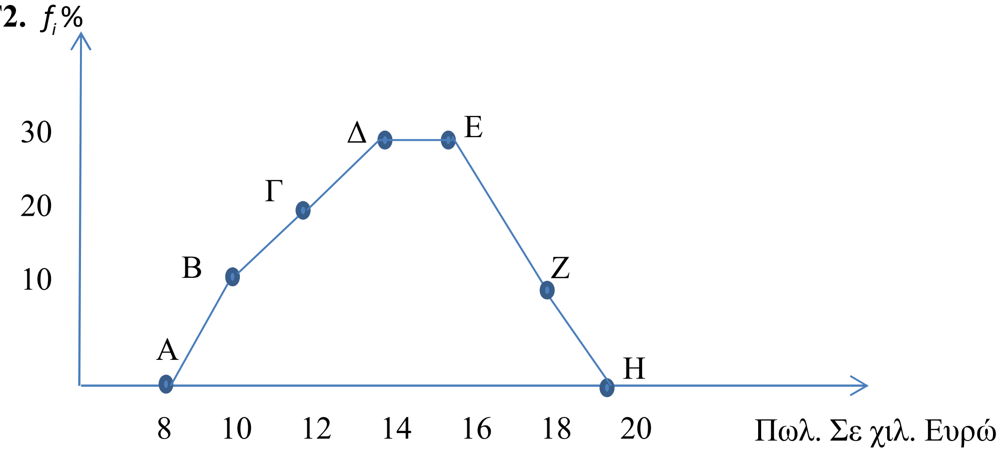
$f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100 \Leftrightarrow 10+20+2y_\Delta+10=100 \Leftrightarrow y_\Delta=30$ και άρα $y_E=30$

Παρατήρηση: Ο υπολογισμός των y_Δ, y_E θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

Έχουμε $\bar{x}=\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i \Leftrightarrow 10\cdot 0{,}1+12\cdot 0{,}2+14\cdot 0{,}01y_\Delta+16\cdot 0{,}01y_E+18\cdot 0{,}1=14{,}2 \Leftrightarrow$

$0{,}30y_\Delta=9 \Leftrightarrow y_\Delta=30, \text{οπότε } y_E=30$

Γ2. $f_i\%$



Γ3.

Κλάσεις [,)	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετικές συχνότητες $f_i\%$
9-11	10	10
11-13	12	20
13-15	14	30
15-17	16	30
17-19	18	10
Σύνολο	-	100

Γ4. Τουλάχιστον 15000 Ευρώ θα λάβουν το $30\%+10\%=40\%$ των πωλητών

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος , οπότε ν = 80

Άρα το εφάπαξ ποσό το δικαιούνται $\frac{40}{100}\cdot 80=32$ πωλητές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $f'(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left[\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)\right]'=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right), x\in R$

Επειδή $e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}>0, x\in R$ τότε:

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}=0\Leftrightarrow 15x^2-11x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{2}{5}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
f΄(x)	+	–	+	
f(x)	Γνησίως αύξουσα	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ $και$ $\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]$

Δ2. Στο $x_1=\frac{1}{3}$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $x_2=\frac{2}{5}$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

Επειδή $A\subseteq B$ τότε P(A) ≤P(B) και άρα $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{2}{5}$

$P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{3}$

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=P(B)=\frac{2}{5}$

$P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

Δ3.

α) Για κάθε $x\in R$ έχουμε

$f(x)=h(x)\Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)}\Leftrightarrow\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x^3-5x^2+6x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ ή $x=3$

β) Έχουμε $x_1=0, x_2=2, x_3=3$. Οπότε $v_1=1, v_2=5, v_3=7$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_iv_i}{v_1+v_2+v_3}=\frac{0\cdot1+2\cdot5+3\cdot7}{1+5+7}=\frac{31}{13}$$

Επιμέλεια: Κούσης Π. – Σιφναίος Δ. – Τζωρτζίνης Ι. – ΦιλιόγλουΒ. – Φλωρόπουλος Α.