ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται *κρίσιμα σημεία* της f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό Z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

(μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη

(μονάδες 2)

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$

(μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f\ g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

(μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση $2x^2 - |w-4-3i|x = -2|z|,\ x \in R$ έχει μια διπλή ρίζα, την x=1.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ_1=1, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο K(4, 3) και ακτίνα ρ_2=4.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι:

$$|z-w|\le 10 \text{ και } |z+w|\le 10$$

Μονάδες 6

Β4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$\left|2z^2-3z-2z\bar{z}\right|=5$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x)+x^2(f'(x)-3)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(1)=\dfrac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2+1)^3-8)\le f(8(x^2+1)^2)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)\,dt=-\xi(3\xi^2-1)f(\xi^3-\xi)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x)=x+\displaystyle\int_1^x\left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt\right)du$ για κάθε x>0
- $f(x)f'(x)\ne 0$ για κάθε x>0 και f(0)=0.

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ με x>0 και $h(x)=(f'(x))^3$ με $x\geq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι:
$f(x)f''(x)+1=(f'(x))^2$ για κάθε x>0

Μονάδες 4

Δ2. α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f΄ στο $(0,+\infty)$

(μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι f΄(0)=1

(μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι :

α. $g(x)\geq 2-x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$
(μονάδες 2)

β. $\int_0^1 (2-x)f(x)dx<1$
(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α4. α. Σ, **β.** Λ, **γ.** Σ, **δ.** Λ, **ε.** Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $2x^2 - |w-4-3i|x + 2|z| = 0$ (1)

Είναι Δ=0 δηλαδή $|w-4-3i|^2 - 16|z| = 0$ (Ι)

Το 1 είναι ρίζα της (1) οπότε:

$\boxed{2 - |w-4-3i| + 2|z| = 0}$ (ΙΙ)

Από (Ι) (ΙΙ) έχουμε

$|w-4-3i|^2 - 8(-2 + |w-4-3i|) = 0 \Leftrightarrow$

$|w-4-3i|^2 - 8|w-4-3i| + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$(|w-4-3i|^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{|w-4-3i| = 4}$.

Οπότε ο Γ.Τ. των εικόνων του w είναι κύκλος με Κ(4, 3) και ρ_1=4.

Η (Ι) γίνεται $4^2 - 16|z| = 0$ οπότε $|z|$=1 άρα ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με $K_2(0, 0)$ και ακτίνα ρ_2=1.

Β2. Βρίσκουμε το κοινό σημείο των δύο γεωμετρικών τόπων λύνοντας το (Σ):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases}.$$

Άρα ο μοναδικός μιγαδικός που η εικόνα του ανήκει και στους δύο Γεωμετρικούς τόπους είναι ο $z = w = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

<u>Β' Τρόπος:</u>

$K_1K_2 = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$ και P_1+P_2=4+1=5 οπότε οι κύκλοι c_1, c_2 εφάπτονται εξωτερικά σε ένα σημείο Α που είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο.

Β3. Ισχύει $|w-4-3i|=4$

Όμως $||w|-|-4-3i|| \le |w+(-4-3i)| \le |w|+|-4-3i|$

Άρα $||w|-5| \le 4$ οπότε $-4 \le |w|-5 \le 4$ δηλαδή $1 \le |w| \le 9$

Έχουμε $|z+w| \le |z|+|w| \Leftrightarrow$

$|z+w| \le 1+|w| \Leftrightarrow$

$|z+w| \le 1+9 \Leftrightarrow$

$|z+w| \le 10$.

Όμοια $|z-w| \le |z|+|w| \Leftrightarrow$

$|z-w| \le 1+|w| \Leftrightarrow$

$|z-w| \le 1+9 \Leftrightarrow$

$|z-w| \le 10$.

Β4. Είναι $|2z^2-3z-2z\bar{z}|=5 \Leftrightarrow$

$|z(-z-2\bar{z}-3)|=5$

$|z||2z-2\bar{z}-3|=5$

$|2z-2\bar{z}-3|=5$

Έστω z=x+yi, $x,y \in R$.

Οπότε $|2x+2yi-2x+2yi-3|=5 \Leftrightarrow$

$|-3+4yi|=5 \Leftrightarrow$

$\sqrt{9+16y^2}=5$

$16y^2=16 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=1$ ή y= -1.

Αν y=1 από την σχέση $x^2+y^2=1$ προκύπτει x=0 οπότε $z_1=0+i=i$.

Αν y= -1 από την σχέση $x^2+y^2=1$ προκύπτει x=0 οπότε $z_2=0-i=-i$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $2xf(x)+x^2[f'(x)-3]=-f'(x)$ για κάθε $x \in R$ οπότε

$[(x^2+1)f(x)-x^3]'=0$ άρα $(x^2+1)f(x)-x^3=c,\ \ c \in R$.

Για x=1 έχουμε $2f(1)-1=c \Leftrightarrow 2\frac{1}{2}-1=c \Leftrightarrow c=0$.

Οπότε $(x^2+1)f(x)-x^3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ για κάθε $x \in R$.

$f'(x)=\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)'=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}>0$ για κάθε $x\in R$ -$\{0\}$.

Η f είναι συνεχής στο R οπότε και γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2. Για $x\to-\infty$ έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1=\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2}=0=\beta$.

Οπότε η γραφική παράσταση της f στο $-\infty$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία y=x.

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=0=\beta$.

Άρα η y=x είναι ασύμπτωτη της Cf και στο $+\infty$.

Γ3. $f[5(x^2+1)^3-8]\le f[8(x^2+1)^2]\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$5(x^2+1)^3-8\le 8(x^2+1)^2\Leftrightarrow$

$5(x^2+1)^3-8(x^2+1)^2-8\le 0$

Θέτουμε $x^2+1=y$ οπότε

$5y^3-8y^2-8\le 0$

$(y-2)(5y^2+2y+4)\le 0\overset{(5y^2-2y+4>0\ \text{για κάθε}\ y\in R)}{\Leftrightarrow}$

$y-2\le 0\Leftrightarrow y\le 2$ ή

$x^2+1\le 2$ ή

$x^2\le 1$ ή

$1\le x\le 1$

Γ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $\Theta(x)=x\int_0^{x^3-x}f(t)dt,\ \ x\in[0,1]$.

Η f είναι συνεχής στο R οπότε η $\int_0^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο R.

Η $g(x)=x^3$-x είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R οπότε η $\int_0^{x^3-x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R.

Οπότε η $\Theta(x)=x\int_0^{x^3-x}f(t)dt$ είναι συνεχής στο R άρα και στο [0, 1] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η Θ(x) είναι παραγωγίσιμη στο R άρα και στο (0, 1) με

$\Theta'(x)=\int_0^{x^3-x}f(t)dt+xf(x^3-x)(3x^2-1)$

Θ(0)=0 και Θ(1)=0.

Οπότε από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (0,1) : \Theta'(\xi) = 0$ δηλαδή

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt + \xi f(\xi^3 - \xi)(3\xi^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi f(\xi^3 - \xi)(3\xi^2 - 1)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f΄ είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής.

Η $\kappa(t) = \dfrac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}$ είναι συνεχής άρα $\int_1^u \dfrac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη και άρα συνεχής.

Οπότε η $\int_1^x (\int_1^u \dfrac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}dt)du$ είναι παραγωγίσιμη και

η $f(x) = x + \int_1^x (\int_1^u \dfrac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}dt)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0+\infty)$ με

$f'(x) = 1 + \int_1^x \dfrac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}dt$, x>0 και

$f''(x) = \dfrac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)}$, x>0, άρα

$f''(x) \cdot f(x) = (f'(x))^2 - 1 \Leftrightarrow f''(x)f(x) + 1 = (f'(x))^2$ για κάθε x>0.

Δ2. α) Είναι $f(x) \cdot f'(x) \neq 0$ για κάθε x>0 οπότε $f(x) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και f(1)=1+0=1>0 οπότε f(x)>0 για κάθε x>0.

Η f΄ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και f΄(1)=1+0=1>0 οπότε f΄(x)>0 για κάθε x>0.

β) Είναι $(f'(x))^2 = 1 + f(x)f''(x)$ για κάθε x>0 οπότε

$f'(x) = \sqrt{1 + f(x)f''(x)}$.

Η f είναι συνεχής στο x_0=0 οπότε

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1 + f(x)f''(x)} = \sqrt{1 + 0 \cdot f''(0)} = \sqrt{1} = 1$.

Δ3. α) Είναι $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ και $g'(x) = \dfrac{f''(x) - f'(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} = \dfrac{-1}{f^2(x)}$

Οπότε $g(1)=\frac{f'(1)}{f(1)}=1$ και $g'(1)=\frac{-1}{f^2(1)}=\frac{-1}{1}=-1$.

Άρα η εφαπτομένη της Cg στο A(1, g(1)) είναι

ε: y-g(1)=g΄(1)(x-1) ή y= -x+2.

Αφού η g είναι κυρτή η Cg βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της οπότε

$g(x)\geq -x+2$ για κάθε x>0.

Το «=» ισχύει μόνο για το σημείο Α.

β) Έχουμε $g(x)\geq -x+2$ για κάθε x>0 $\Leftrightarrow$

$\frac{f'(x)}{f(x)}\geq -x+2$ για κάθε x>0 $\Leftrightarrow f'(x)\geq(2-x)f(x), f(x)>0$.

Άρα $f'(x)-(2-x)f(x)\geq 0$.

Το «=» δεν ισχύει παντού και για x=0 είναι $f'(0)-(2-0)f(0)>0$

Άρα $\int_0^1[f'(x)-(2-x)f(x)]dx>0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1(2-x)f(x)dx>0 \Leftrightarrow$

$[f(x)]_0^1-\int_0^1(2-x)f(x)dx>0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1(2-x)f(x)dx<1$.

Δ4. Επειδή h(x)>0 για κάθε $x\in[0,1]$ είναι

$E=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1[f'(x)]^3dx=$

$\int_0^1[f'(x)]^2 f'(x)dx=[[f'(x)]^2 f(x)]_0^1-\int_0^1 2f'(x)f''(x)f(x)dx=$

$(f'(1))^2 f(1)-(f'(0)^2 f(0)-\int_0^1 2f'(x)(f'(x))^2-1]dx$

$=1-2\int_0^1(f(x))^3-f'(x)dx$

$=1-2\int_0^1(f'(x))^3dx+2\int_0^1 f'(x)dx$

$=1-2E+2[f(x)]_0^1$

$=1-2E+2(f(1)-f(0))$

$=1-2E+2$

$=3-2E$.

Άρα Ε=3-2Ε

3Ε=3 οπότε Ε=1.

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ **«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.