ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ισχύει:

$$P(A')=1-P(A)$$

Μονάδες 7

Α2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim_{x \to x_0}(\text{συν}x) = \text{συν}x_0$

(μονάδες 2)

β) $(cf(x))' = c\,f'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Χ χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

(μονάδες 2)

ε) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B \neq \varnothing$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x(2x-3)$, $x \in R$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με

$P(A) = x_1$ και $P(B) = -\dfrac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{2}{3}$

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα και

Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6}\le P(A'-B')\le\frac{2}{3}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν ως προς μία ποσοτική μεταβλητή Χ και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές xi**	**fi%**	**Fi**	**Fi%**
[α, .)				λ
[. , .)				$3\lambda+10$
[. , .)				
[. , .)				$\kappa\lambda^2-2\lambda+10$
[. , .)				$\kappa\lambda^2-3\lambda+30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F3 και F5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2-8x+3\kappa,\ \text{όπου } x\in R \text{ και } \kappa\in R$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=1$ και $\lambda=10$

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10$, $f_2\%=30$, $f_3\%=20$, $f_4\%=30$ και $f_5\%=10$

Μονάδες 5

Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι α=10 και c=4

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες η ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1, x \in R$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 0$ και $1 < \omega_3 < \omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \dfrac{1}{3}$, όπου i=1, 2

και $P(\omega_3) = -\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}$

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

$A = \{\omega \in \Omega / f'(\omega) \le 0\}$, $A = \{\omega \in \Omega / f(\omega) > 1\}$

και

$\Gamma = \{\omega \in \Omega / x^2 + \omega x \ge -\dfrac{1}{4}$ για κάθε $x \in R\}$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Α), Ρ(Β), Ρ(Γ) και Ρ(Α-Β)

(μονάδες 8)

Μονάδες 16

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o

Μονάδες 4

Δ3. Αν $M_\kappa(\omega_\kappa, y_\kappa)$, κ=1, 2, 3, 4 είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): y=x+1 με $2_{\delta_{\omega\kappa}} = \delta y_\kappa$ και $R_{y_\kappa} = 5$

τότε να υπολογίσετε τα ω_3 και ω_4 του δειγματικού χώρου Ω, όπου

δ_{ω_κ}: η διάμεσος των τετμημένων των σημείων M_κ,

δ_{y_κ} : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων M_κ και

R_{y_κ} : το εύρος των τεταγμένων των σημείων M_κ

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α4. α) Σ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=[2e^x(2x-3)]'=2e^x(2x-1)$

Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2e^x(2x-1)\geq 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2},+\infty)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\frac{1}{2}]$. Στο $x=\frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $f(\frac{1}{2})=2e^{1/2}(2\frac{1}{2}-3)=-4\sqrt{e}$.

Β2. $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{-(-4\sqrt{e})}{6\sqrt{e}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Β3. Έστω ότι Α, Β είναι ασυμβίβαστα τότε

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}>1$ ΑΤΟΠΟ.

Οπότε Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

Β4. Αρκεί $\frac{1}{6}\leq P(A'-B')\leq\frac{2}{3}$ δηλαδή $P(A'-B')\geq\frac{1}{6}$ και $P(A'-B')\leq\frac{2}{3}$

Ισχύει $A'-B'\subseteq A'$ οπότε

$P(A'-B')\leq P(A')$ ή

$P(A'-B')\leq 1-P(A)$

$P(A'-B')\leq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ άρα $P(A'-B')\leq\frac{2}{3}$.

Θα δείξουμε $P(A'-B')\geq\frac{1}{6}$ ή $P[(A'\cap(B')]'\geq\frac{1}{6}$ ή

$P(A'-B')\geq\frac{1}{6}$ ή $P(B-A)\geq\frac{1}{6}$ ή $P(B)-P(A\cap B)\geq\frac{1}{6}$ ή

$\frac{2}{3} - P(A \cap B) \geq \frac{1}{6}$ ή $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \geq P(A \cap B)$ ή $P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$ ή

$P(A \cap B) \leq P(A)$ ισχύει αφού $A \cap B \subseteq A$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι F_5=1 και F_5%=100.

Από τους τύπους VIETA

$$\left.\begin{aligned} F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \frac{3k}{5} \end{aligned}\right\} \overset{F_5=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ k = 1 \end{cases}$$

Επειδή $F_5\%=100 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-70=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 10 \\ \text{ή} \\ \lambda = -7 \quad \text{Απορ.} \end{cases}$

Άρα λ=10.

Γ2. Οπότε $f_1\%=\lambda=10$, $f_2\%=30$, $f_3\%=20$, $f_4\%=30$, $f_5\%=10$.

Γ3. Έχουμε $f_1\% + \frac{f_2\%}{2} = 25\%$ οπότε $x_2=16$

$f_5\% + \frac{f_4\%}{2} = 25$ οπότε $x_4=24$

Είναι $x_2 + 2c = x_4 \Leftrightarrow \boxed{c=4}$.

$1^{η}$ κλάση [α, α+4)

$2^{η}$ κλάση [α+4, α+8)

Οπότε $x_2 = \frac{\alpha + 4 + \alpha + 8}{2}$ ή

$16 = \frac{2\alpha + 12}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 20$ άρα $\boxed{\alpha=10}$.

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές xi**	**fi%**	**Fi**	**Fi%**
[10, 14)	12	10	0,1	10
[14 , 18)	16	30	0,4	40
[18 , 22)	20	20	0,6	60
[22 , 26)	24	30	0,9	90
[26 , 30)	28	10	1	100
Σύνολα		100		

Γ4. Έχουμε $\frac{40}{100}=\frac{800}{\nu}$ οπότε ω=2000.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) $P(\omega_1)=P(-1)=f(-1)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$P(\omega_2)=P(0)=f(0)-\frac{1}{3}=0+1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$f'(x)=(\frac{x}{x^2-1}+1)'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x+1)}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}$ οπότε

$P(\omega_3)=-\frac{1}{6}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=-\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})=\frac{1}{12}$ οπότε

$P(\omega_4)=1-P(\omega_1)-P(\omega_2)-P(\omega_3)=1-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$

β) $f'(\omega)\le 0\Leftrightarrow\frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2}\le 0\Leftrightarrow 1-\omega^2\le 0\Leftrightarrow\omega^2\ge 1\Leftrightarrow$

$\omega\le -1$ ή $\omega\ge 1$. Άρα Α{-1, ω_3, ω_4} και

$P(A)=P(-1)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$f(\omega)>1\Leftrightarrow\frac{\omega}{\omega^2+1}+1>1\Leftrightarrow\frac{\omega}{\omega^2+1}>0\Leftrightarrow\omega>0$ άρα

Β={ω_3, ω_4} οπότε $P(B)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

Για κάθε $x \in R$ είναι $x^2 + \omega x + \frac{1}{4} \geq 0$ οπότε $\Delta \leq 0$

Δηλαδή $\omega^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \omega \leq 1$ άρα Γ={-1, 0}

Οπότε $P(\Gamma) = P(-1) + P(0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

Είναι Α-Β={-1} οπότε $P(A - B) = P(-1) = \frac{1}{6}$.

Δ2. Έστω Μ (x_0, $f(x_0)$) το σημείο επαφής.

$\lambda\varepsilon\varphi = \varepsilon\varphi 45 = 1$ οπότε $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - x_0}{(x_0^2 + 1)^2} = 1$

$\Leftrightarrow x_0^4 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

f(0)=1 και f΄(0)=1 άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της cf στο Μ είναι $y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$.

Δ3. $M_1(\omega_1, y_1)$ όπου $\omega_1 = -1$ και $y_1 = -1+1=0$

M_2 (ω_2, y_2) όπου $\omega_2=0$ και $y_2=0+1=1$

$M_3(\omega_3, y_3)$ όπου $y_3=\omega_3+1$

$M_4(\omega_4, y_4)$ όπου $y_4=\omega_4+1$ και αφού $1<\omega_3<\omega_4$.

Είναι $y_1<y_2<y_3<y_4$

$Ry = y_4 - y_1 \Leftrightarrow 5 = \omega_4 + 1 \Leftrightarrow \omega_4 = 4$

$\delta_\omega = \frac{0 + \omega_3}{2} = \frac{\omega_3}{2}$

$\delta_y = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{1 + \omega_3 + 1}{2} = \frac{2 + \omega_3}{2}$

Είναι 2δω=δy $\Leftrightarrow 2\frac{\omega_3}{2} = \frac{2 + \omega_3}{2} \Leftrightarrow \omega_3 = 2$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ **«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.