ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho,\ \rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in IR$.

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\ x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)\left(\overline{z}-2\right) + |z-2| = 2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα ρ=1. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in R$, και $\left|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)\right|=2$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \text{ και } \gamma=5$$

Μονάδες 9

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_0, α_1, α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v|<4$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : R \to R$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $\left(f(x))+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$, για κάθε $x\in R$
- f(0)=1 και
- $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in R$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x))=1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt,\ \ x\in(1,+\infty) \text{ και } \alpha>1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο IR

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6}g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6}g(u)du \quad \text{(μονάδες 6)}$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha),x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σε 334
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222

Α4.
α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(z-2)(\overline{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$
Οπότε $|z-2|=1$ ή $|z-2|=-2$ (αδύνατη)
Άρα ο γεωμετρικό τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο K(2,0) και ακτίνα ρ = 1.
Έχουμε $|z|=|(z-2)+2|\le|z-2|+2=3$, οπότε $|z|\le 3$

Β2. Έστω $z_1=\kappa+\lambda i$ και $z_2=\kappa-\lambda i$ με $\kappa,\lambda\in R,\lambda>0$.
Έχουμε $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2\Leftrightarrow|2\lambda|=2\Leftrightarrow\lambda=1$ άρα $z_1=\kappa+i$ και $z_2=\kappa-i$
Έχουμε $|z_1-2|=1\Leftrightarrow|(\kappa-2)+i|=1\Leftrightarrow\sqrt{(\kappa-2)^2+1}=1\Leftrightarrow\kappa=2$
Άρα $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$.
Είναι $z_1+z_2=-\beta\Leftrightarrow\beta=-4$ και $z_1z_2=\gamma\Leftrightarrow\gamma=5$

Β3. Αφού οι μιγαδικοί αριθμοί α_0, α_1, α_2 ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1, τότε θα είναι:
$|\alpha_0|\le 3,|\alpha_1|\le 3$ και $|\alpha_2|\le 3$.
Έχουμε $\mathrm{v}^3+\alpha_2\mathrm{v}^2+\alpha_1\mathrm{v}+\alpha_0=0\Leftrightarrow$
$\mathrm{v}^3=-\left(\alpha_2\mathrm{v}^2+\alpha_1\mathrm{v}+\alpha_0\right)$
Άρα $\left|\mathrm{v}^3\right|=\left|-\left(\alpha_2\mathrm{v}^2+\alpha_1\mathrm{v}+\alpha_0\right)\right|\Leftrightarrow$
$|\mathrm{v}|^3=\left|\alpha_2\mathrm{v}^2+\alpha_1\mathrm{v}+\alpha_0\right|\le\left|\alpha_2\mathrm{v}^2\right|+|\alpha_1\mathrm{v}|+|\alpha_0|\le 3|\mathrm{v}|^2+3|\mathrm{v}|+3$.
Επομένως $|\mathrm{v}|^3-3\left(|\mathrm{v}|^2+|\mathrm{v}|+1\right)\le 0<1$.

Άρα $|v|^3 - 1 - 3\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\left(|v| - 1\right)\left(|v|^2 + |v| + 1\right) - 3\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\left(|v| - 4\right)\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0$ και αφού $|v|^2 + |v| + 1 > 0$

Θα είναι $|v| - 4 < 0$ δηλαδή $|v| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in R$ έχουμε $2\left(f(x) + x\right) \cdot \left(f'(x) + 1\right) = 2x \Leftrightarrow$

$\left[\left(f(x) + x\right)^2\right]' = \left(x^2\right)'$

Άρα υπάρχει $c \in R$, ώστε $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + c$, $x \in R$

Για x = 0 έχουμε c = 1

Επομένως $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + 1, x \in R$ (1)

Θέτουμε $\varphi(x) = f(x) + x, x \in R$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται $\varphi^2(x) = x^2 + 1, x \in R$

Η φ είναι συνεχής στο R με $\varphi(x) \neq 0, x \in R$

Οπότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού φ(0) = f(0) = 1 , τότε φ(x) > 0 , $x \in R$

Άρα

$\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in R \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1}, x \in R \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in R$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R

με $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0, x \in R$, αφού

Για κάθε $x \in R$ ισχύει $\sqrt{x^2 + 1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R και άρα η f ‘1-1’.

Για κάθε $x \in R$ έχουμε

$f\left(g(x)\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right) = f(0) \overset{f\,'1-1'}{\Leftrightarrow} g(x) = 0$

Έχουμε $g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$, $x \in R$

x	$-\infty$ -1	0	$+\infty$
g΄	+	-	+
g	Γνησίως αύξουσα	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα

Έχουμε $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

- Στο $A_1 = (-\infty,-1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $g(A_1) = (-\infty,-\frac{1}{2}]$ και αφού $0 \notin g\left(A_1\right)$, τότε η εξίσωση g(x) = 0 δεν έχει καμία ρίζα στο A_1
- Στο $A_2 = [-1,0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε $g(A_2) = [-1,-\frac{1}{2}]$ και αφού $0 \notin g\left(A_2\right)$, τότε η εξίσωση g(x) = 0 δεν έχει καμία ρίζα στο A_2
- Στο $A_3 = [0,+\infty)$ οπότε η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $g(A_3) = [-1,+\infty)$ και αφού $0 \in g\left(A_3\right)$, τότε η εξίσωση g(x) = 0 ακριβώς μία ρίζα στο A_3

Άρα η εξίσωση f(g(x)) = 1 έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt \cdot \eta\mu x$, $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$

Η f είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{4}]$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\frac{\pi}{4}]$.

Η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\frac{\pi}{4}]$ (άρα και συνεχής) , ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_0^x f(t)dt$ και $x-\frac{\pi}{4}$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{4}]$ ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ και ημx.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{4})$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ και ημx με $h'\left(x\right) = \sigma\upsilon\nu x\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f\left(t\right)dt + \eta\mu x \cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
- h(0) = $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0 - \frac{\pi}{4})\eta\mu x_0 + \sigma\upsilon\nu x_0 \int_0^{x_0 - \frac{\pi}{4}} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+5h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} + \frac{f(1) - f(1-h)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0}\left(5\frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} + \frac{f(1) - f(1-h)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0}\left(5\frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}\right) =$$

$$= 5 \cdot f'(1) + f'(1) = 0$$

Άρα 6f΄(1)=0, οπότε f΄(1)=0

Ισχύει ότι: $\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{f(1+5h) - f(1)}{5h}\right) \overset{u=5h}{=} \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{u} = f'(1)$ και

$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(1-h) - f(1)}{-h}\right) \overset{u=-h}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1)$$

Η f΄ είναι γνησίως αύξουσα $(0, +\infty)$ άρα

Για x < 1 έχουμε f΄(x) < f΄(1) = 0

Για x > 1 έχουμε f΄(x) > f΄(1) = 0

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1.

Δ2. Η συνάρτηση $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$, οπότε η

η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>0$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και x > 1.
Άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\int_x^{x+1} g(u)du, x>1$

Η K(x) γράφεται $K(x)=-\int_2^x g(u)du+\int_2^{x+1} g(u)du, x>1$.

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$K'(x)=g(x+1)-g(x)>0, x\in(1,+\infty)$, αφού x + 1 > x και g γνησίως αύξουσα.

Οπότε η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Η ανίσωση γίνεται

$$K(8x^2+5)>K\left(2x^4+5\right)\underset{\substack{8x^2+5>1\\2x^4+5>1}}{\overset{K\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow}} 8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow x^2\left(4-x^2\right)>0\Leftrightarrow$$

$x\in(-2,0)\cup(0,2)$

Δ3. Η g΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}=\frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-f(1))}{(x-1)^2}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο [1,x], οπότε υπάρχει

$\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow(x-1)f'(\xi)=f(x)-1$.

Άρα $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-f'(\xi)(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$

Έχουμε 1 < ξ < x και η f΄ γνησίως αύξουσα οπότε $f'(\xi)<f'(x)$.

Οπότε $g''(x)>0$, $x\in(1,+\infty)$ και άρα η g κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Η σχέση που μας δίνεται γράφεται: g(x) = g΄(α) (x – α),x > 1
Θεωρούμε την συνάρτηση h(x) = g(x) – g΄(α)(x – α), x > 1.
Είναι h(α) = 0.
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με h΄(x) =g΄(x) – g΄(α)

Έχουμε $h'(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=g'(a)\overset{g'1-1}{\Leftrightarrow} x=a$

Για x < α είναι $g'(x) < g'(a) \Leftrightarrow h'(x) < 0$
Για x > α είναι $g'(x) > g'(a) \Leftrightarrow h'(x) > 0$
Η h έχει ελάχιστο στο α με h(α) = 0. Οπότε το α μοναδική ρίζα της εξίσωση h(x) = 0.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ
«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.