ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x)=x είναι f΄(x)=1, για κάθε $x \in R$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση *f* παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό,*** *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος,*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ (μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)f(x) + f(x)g'(x) \quad \text{(μονάδες 2)}$$

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_1, \omega_4\}$ και $B=\{\omega_1, \omega_3\}$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1) = -\frac{1}{2} \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$
- Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της f(x) ως προς x, όταν x=1, όπου $f(x) = \frac{x}{3}\ln x, x > 0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ και $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

Μονάδες10

Β2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4}$, όπου Α΄ το συμπληρωματικό του Α.

Μονάδες7

Β3. Αν $P(A') = \frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A-B)\cup(B-A)]$ και $P(A'-B')$, όπου Β΄ το συμπληρωματικό του Β.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.
Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι X_4=85
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι δ=75 και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι c=10.

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές xi**	**Σχετική Συχνότητα fi**
[., .)		
[., .)		
[., .)		
[., .)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Γ3. Δίνεται ότι f_1=0,1, f_2=0,3, f_3=0,2 και f_4=0,4
Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$

Μονάδες7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με κ<ν, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x\ln x+k$, $x>0$, όπου κ ακέραιος με κ>1 και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1, f(1)), η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού Ε, με Ε<2.

Δ1. Να αποδείξετε ότι κ=2.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τετραγωνικές τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y}=31$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}=30$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι:

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in R$ με λ>0.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$ με $\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}=e^{7}$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών f(α), f(β), f(γ), f(e), $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ όπου $f(x) = x\ln x + 2$.

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega=\{t_n, n=1,2,3,\dots,30 : 0<t_1<t_2<\dots<t_{10}<\frac{1}{e}<t_{11}<\dots<t_{30}=1\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

$A=\{t\in\Omega$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (t,f(t)), να σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία}

$B = \{ t\in\Omega : f(t) > f'(t) + 1\}$ όπου $f(t)=t\ln t+2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β(μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14
Α3. Σχολικό βιβλίο 87
Α4.
α) Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1}{x^2\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = \frac{1}{4}$$

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}, x > 0$$

Έχουμε $P(\omega_3) = f'\left(1\right) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Β2. Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

- Επειδή $\{\omega_3\} \subseteq A'$, τότε $P(\omega_3) \le P(A')$, δηλαδή $\frac{1}{3} \le P(A')$
- Επειδή $A' \subseteq \Gamma = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, τότε

  $$P(A') \le P(\Gamma) = P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

  Άρα $\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4}$

Β3. Έχουμε $P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$$P(\omega_4) = 1 - \left[P\left(\omega_1\right) + P\left(\omega_2\right) + P(\omega_3)\right] = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$A - B = \{\omega_4\}, B - A = \{\omega_3\}$, οπότε $(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3, \omega_4\}$ και

$A' - B' = A' \cap \left(B'\right)' = B \cap A' = B - A = \{\omega_3\}$

Άρα $P\left[(A - B) \cup \left(B - A\right)\right] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3}$ και $P\left(A' - B'\right) = P\left(\omega_3\right) = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Αν c το πλάτος κάθε κλάσης τότε οι κλάσεις είναι:
[50,50+c) , [50+c,50+2c), [50+2c,50+3c), [50+3c,50+4c)
Έχουμε $x_4 = 85 \Leftrightarrow \dfrac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow c = 10$

Γ2. Επειδή σε κάθε κλάση οι τιμές κατανέμονται ομοιόμορφα με $\delta = x_3 = 75$ και η διάμεσος έχει αθροιστική σχετική συχνότητα 50%, τότε:
$\dfrac{f_3}{2} + f_4 = 0,5 \Leftrightarrow \dfrac{f_3}{2} + 2f_3 = 0,5 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$
Επομένως $f_4 = 2f_3 = 0,4$.
Έχουμε $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 0,2 + 0,4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,4 - f_1$
$\overline{x} = 74 \Leftrightarrow x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 = 74 \Leftrightarrow$
$55f_1 + 65(0,4 - f_1) + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4 = 74 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$, άρα $f_2 = 0,4 - 0,1 = 0,3$

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Σχετική Συχνότητα** f_i
[50,60)	**55**	**0,1**
[60.70)	**65**	**0,3**
[70.80)	**75**	**0,2**
[80.90)	**85**	**0,4**
Σύνολο	**-**	**1,0**

Γ3. Αν ν το πλήθος των παρατηρήσεων τότε οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 80 έχουν πλήθος:
$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = f_1\nu + f_2\nu + f_3\nu = 0,6\nu$
Η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:
$$\frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{x_1f_1\nu + x_2f_2\nu + x_3f_3\nu}{0,6\nu} = \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4. Αν $\overline{y}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων τότε:
Αφού το 2,5 % των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, έχουμε $\overline{y} + 2s = 74$ και επειδή το 16% των παρατηρήσεων είναι το πολύ 68, έχουμε $\overline{y} - s = 68$.
Άρα s = 2 και $\overline{y} = 70$.
Επειδή $CV = \dfrac{s}{\overline{y}} = \dfrac{2}{70} = \dfrac{1}{35} < \dfrac{1}{10} = 10\%$, το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \ln x + 1, x>0$
Οπότε f(1) = κ και f΄(1) = 1
Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,f(1)) είναι y – κ = f΄(1) (x – 1) , οπότε y = x + κ – 1
Τα σημεία που τέμνει του άξονες είναι A(0,κ – 1) και B(1 – κ , 0).

Το εμβαδόν είναι $E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|1-\kappa||\kappa-1|=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2$, αφού $\kappa>1$

$E<2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2 \Leftrightarrow$

$\kappa^2-2\kappa-3<0 \Leftrightarrow$

$-1<\kappa<3$ και αφού κ ακέραιος με $\kappa>1$,τότε $\kappa=2$.

Δ2.

α) $y = x + 1$

$x = y - 1$

Από εφαρμογή σχολικού $\bar{x}=\bar{y}-1=30$

β) Οι νέες τετμημένες είναι:

$x_1+3, x_2+3, x_3+3, ..., x_{20}+3, x_{21}, x_{22}, ..., x_{35}, x_{36}-\lambda, ..., x_{50}-\lambda$

Επομένως η μέση τιμή τους είναι

$$\bar{x}'=\frac{x_1+x_2+...+x_{50}+60-15\lambda}{50}=\frac{x_1+x_2+...+x_{50}}{50}+\frac{60-15\lambda}{50}=\bar{x}+\frac{60-15\lambda}{50}$$

$$=30+\frac{60-15\lambda}{50}$$

Έχουμε $\bar{x}'=31 \Leftrightarrow 30+\frac{60-15\lambda}{50}=31 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$

Δ3. Έχουμε f(e) = e + 2 και $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$.

$f'(x)=\ln x+1,\ x>0$

Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	**0**	$\frac{1}{e}$ $+\infty$
f΄(x)	-	+
f(x)	**Γνησίως φθίνουσα**	**Γνησίως αύξουσα**

Αφού $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, τότε

$$f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e) \Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right)=0<2-\frac{1}{e}<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

Έχουμε $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=e^7 \Leftrightarrow \ln\left(\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma\right)=\ln e^7 \Leftrightarrow \ln\alpha^\alpha+\ln\beta^\beta+\ln\gamma^\gamma=7 \Leftrightarrow$

$\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=7$

Επομένως το εύρος είναι $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2-0=e+2$

και η μέση τιμή τους είναι: $\dfrac{\alpha\ln\alpha + 2 + \beta\ln\beta + 2 + \gamma\ln\gamma + 2 + e + 0}{5} = \dfrac{15+e}{5}$

Δ4.

α) $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow t > \dfrac{1}{e}$ και αφού $t \in \Omega$ τότε:

$A = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{30}\}$ και $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$

β) Επίσης $t\ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0 \overset{t\in\Omega}{\Leftrightarrow} t < 1$ οπότε $B = \{t_{11}, ..., t_{29}\}$.

Έχουμε $A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{29}\}$ και $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{19}{30}$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ **ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ «ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.