

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 17 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 4

B. α) Αν $z = x + yi \neq 0$, $|z| = \rho$ και θ ένα όρισμα του z , να αποδείξετε ότι ο z παίρνει τη μορφή
 $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

Μονάδες 8,5

β) Αν $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών z_1 , z_2 και $z_1 = z_2$, τότε

- | | | |
|--------------------------|-----|--|
| 1) $\rho_1 = \rho_2$ | και | $\theta_1 + \theta_2 = 0$. |
| 2) $\rho_1 + \rho_2 = 0$ | και | $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. |
| 3) $\rho_1 = \rho_2$ | και | $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. |
| 4) $\rho_1 - \rho_2 = 0$ | και | $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. |

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 1 - 2i \quad \text{και} \quad z_2 = 3 + 4i$$

- α) Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$.

Μονάδες 8

- β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\frac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ .

Μονάδες 8

- γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z - 2z_1| = |z_2|$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4 + \frac{1}{2x+4}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 7

- β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 0$ και

$$x f'(x) - 2f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{(\ln x)^2}$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ