ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού του Α.
Πότε η f λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 5

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 12

γ) *Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3. $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$

4. $|z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$

όπου $z_1=α+βi$ και $z_2 = γ+δi$ είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} -x-3 & , \ x\le -\dfrac{4}{3} \\ 2x+1 & , \ x> -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = -\dfrac{4}{3}$.

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\dfrac{4}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Για $x \neq -\dfrac{4}{3}$, να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \dfrac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z\neq 0$.

α) Αν $|f(z)| = |f(\overline{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 9

γ) Αν $\mathrm{Re}\,(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0)=0$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$:

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιος ώστε $f(x) = x \cdot f'(\xi)$.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{x} + e^{x}$, $x>0$ είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

γ) Αν $h(x) = e^{x} + x^{5} + x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{1}^{e-1} f(x+1)\,dx \quad .$$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ