

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 10

A2. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$

β. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

γ. Ισχύει $(\epsilon \phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x / \sin x = 0\}$

δ. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

- ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$|iz - 1| = 1$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho=1$

Μονάδες 9

- B2.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$

Μονάδες 8

- B3.** Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ και A, B οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB , όπου $K(0, -1)$, είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$

- Γ1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια ρίζα, το 0

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=1$ και $x=1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 2$
- $f(0)=2$ και
- η f' είναι γνησίως αύξουσα

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(2)=f'(2)=2$

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ4. Αν επιπλέον δίνεται ότι $f(\xi) > 0$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^x f(t) dt = x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ