ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει:

$$|z_1 \; z_2| = |z_1| \; |z_2|$$

Μονάδες 10

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 \neq z_2$, τότε η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$

β Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

γ. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

δ. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε. Αν $f : [\alpha, \beta] \to R$ είναι συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{2}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,\, 0)$ και ακτίνα $\rho=1$, εκτός από ένα σημείο του (μονάδες 7). Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού (μονάδες 2).

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1,\, z_2$ είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος Β1, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1+z_2-4|\le 2$$

Μονάδες 8

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1, να βρεθούν εκείνοι για τους οποίους ισχύει:

$$|z|=\sqrt{5}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{2}\ell n^2 x+x, \quad x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,\,+\infty)$, και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό α τέτοιο, ώστε στο διάστημα $(\alpha,\, \alpha+1)$ η εξίσωση

$$f(x^4+2x)=f(4)$$

να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Μονάδες 9

Γ3. Να λύσετε στο διάστημα $(0,\,+\infty)$ την ανίσωση

$$x\,\ell n^2 x<2-2x$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει:

$$3\int_{1}^{x} 2\,t f(t)dt + x^3 = 3x^2 f(x) + 3x - 8, \quad x>0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}, \quad x>0$$

(μονάδες 3) καθώς επίσης ότι η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ασύμπτωτη ($y=x$) της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$f'(x)>\frac{f(x)-2}{x-1} \quad \text{για κάθε } x>1$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ