

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{μονάδες 2})$$

β. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό. (μονάδες 2)

γ. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ (μονάδες 2)

δ. Ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2)

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) \quad (\text{μονάδες 2})$$

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z + 4| = 2|z + 1|$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$

Μονάδες 9

- B2.** Αν z_1 ο πραγματικός αριθμός με $\operatorname{Re}(z_1) > 0$ και z_2 ο φανταστικός αριθμός με $\operatorname{Im}(z_2) < 0$ είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος **B1**, τότε να αποδείξετε ότι:

$$z_1 = 2 \quad \text{και} \quad z_2 = -2i$$

Μονάδες 8

- B3.** Αν z_1, z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος **B2**, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(z_1 - z_2)^{20} - (z_1 + z_2)^{20}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

- Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

- Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία (μονάδες 5) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e f(x) \leq 1 \quad \text{για κάθε } x > 0 \quad (\text{μονάδες 5})$$

Μονάδες 10

- Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 4).
Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ (μονάδες 5)

Μονάδες 9

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Μονάδες 8

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ (μονάδες 4) και, στη συνέχεια, να λύσετε στο διάστημα $(0, 1]$ την εξίσωση:

$$\int_1^x f(t) dt = x - 1 \quad (\text{μονάδες 4})$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ