ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Σχολικό βιβλίο σελίδα 15
β) i, ii Σχολικό βιβλίο σελίδα 35

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α4. α) Η πρόταση είναι Λάθος: Αντιπαράδειγμα σχολικό βιβλίο σελίδα 134
β) Η πρόταση είναι Λάθος: Αντιπαράδειγμα

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

$$Είναι\ \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=1-3=-2$$

αλλά f (1)=2

Α5. Σωστό είναι το γ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η ευθεία y=2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$ όταν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$
Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=\lambda$
αφού $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$
οπότε $\lambda=2$

Β2. Για $\lambda=2$ είναι $f(x)=e^{-x}+2$
Θεωρούμε $g(x)=f(x)-x$
Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την g στο [2,3]
Η g είναι συνεχής στο [2, 3] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$g(2)=e^{-2}+2-2=e^{-2}=\frac{1}{e^2}>0$$

$$g(3)=e^{-3}+2-3=\frac{1}{e^3}-1=\frac{1-e^3}{3}<0$$

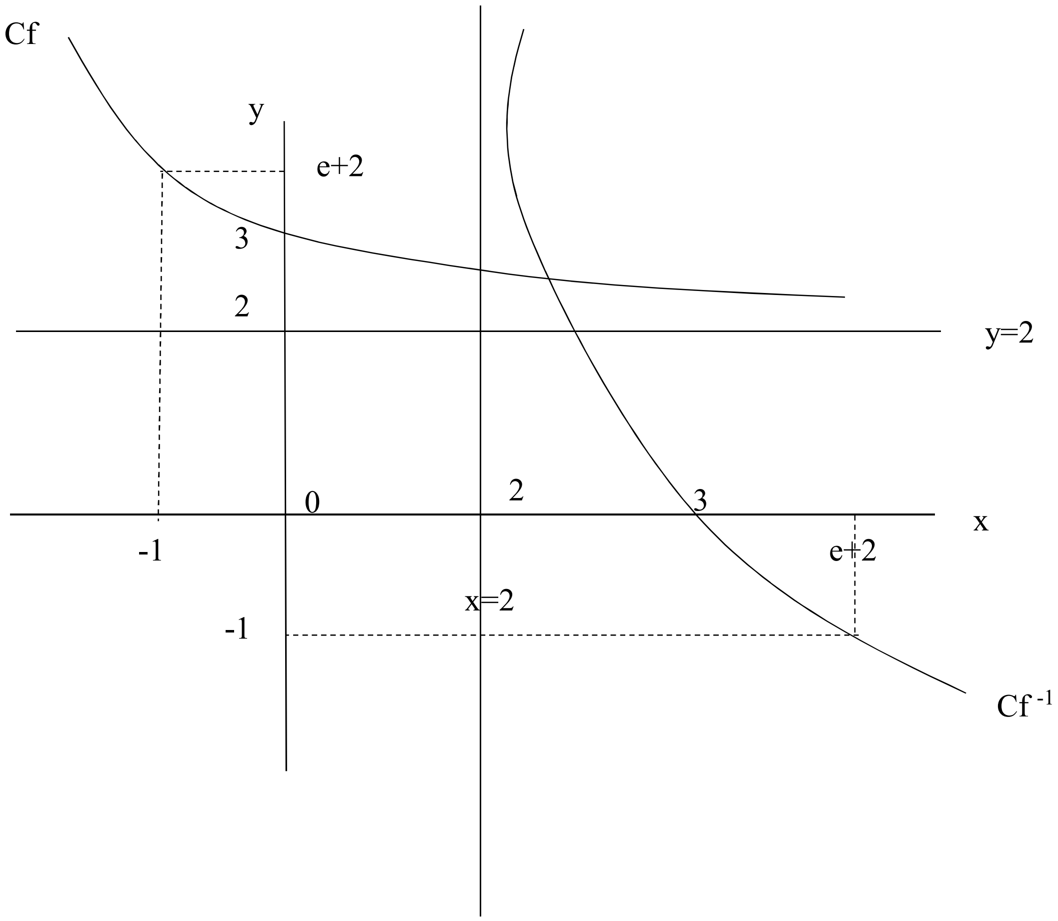
οπότε $g(2)\cdot g(3)<0$
Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)\cdot g(x_0)=0$ ή $f(x_0)-x_0=0$
Για κάθε $x\in R$ είναι $g'(x)=-e^{-x}-1=-(e^{-x}+1)<0$ οπότε η g είναι γν. φθίνουσα στο R άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Β3. Για κάθε $x\in R$ είναι $f'(x)=-e^{-x}<0$ οπότε f είναι γν. φθίνουσα στο R άρα και 1-1 άρα αντιστρέφεται.
Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+2=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-2\overset{y>2}{\Longleftrightarrow}-x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$
Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$.

B4. Έχουμε $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}[-\ln(x-2)] = +\infty$

διότι $\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2) \overset{x-2=u}{=} \lim_{u\to 0^+} lnu = -\infty$

Άρα η x=2 κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf^{-1}.



ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$$

Γ1.

Αφού η f παραγωγίσημη στο $x_0=1$ είναι και συνεχής στο $x_0=1$

Άρα $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$

$1+\alpha=1+\beta \Rightarrow \boxed{\alpha=\beta}$ (1)

Επίσης $f(1)=1+\alpha$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1} \overset{\alpha=\beta}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1} = 1+\beta$$

Άρα 1+β=2⇔β=1, (1)⇒$\boxed{α=1}$

Γ2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, x \geq 1 \\ e^{x-1}, x < 1 \end{cases}$$

Είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, x > 1 \\ 2, x = 1 \\ e^{x-1}+1, x < 1 \end{cases}$$

Άρα f ΄(x)>0 x∈IR άρα η f γν. αύξουσα στο IR.

$$f(A_f) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = IR$$

Γ3. i) Η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο Δ=(-∞, 0) οπότε

f(Δ)= $\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 0^-} f(x) = (-\infty, \frac{1}{e})$

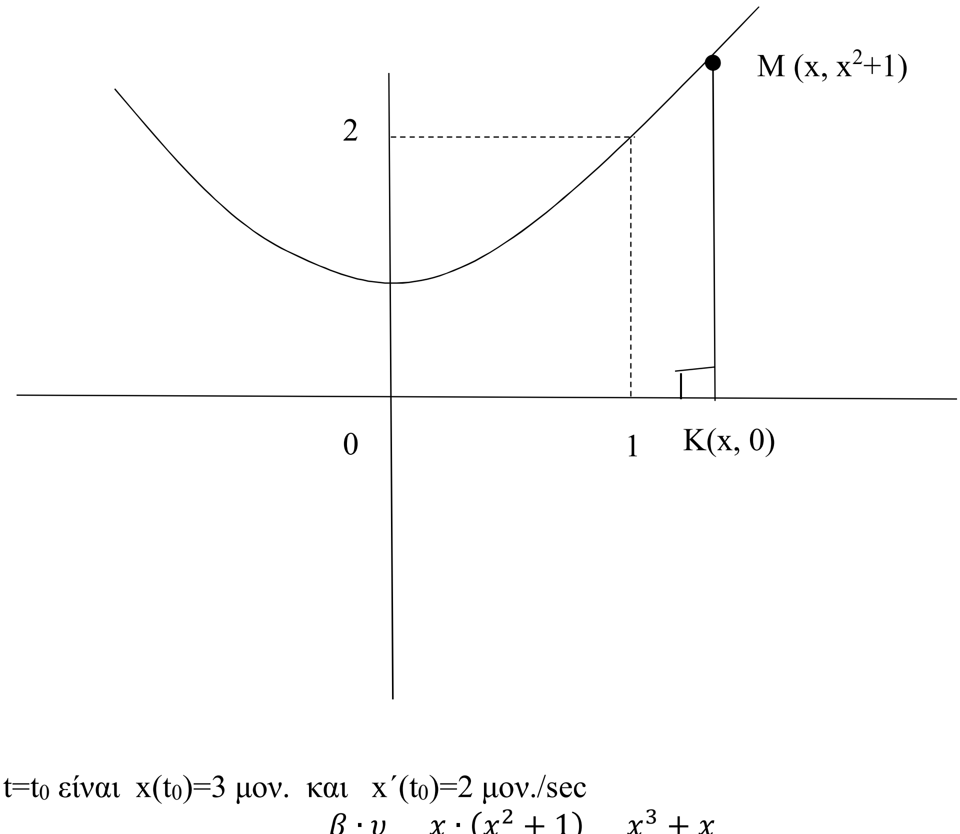
Ο αριθμός ο∈f ((-∞, 0)) άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-∞, 0) και αφού η f γν. αύξουσα στο (-∞, 0) η ρίζα είναι μοναδική άρα η f(x)=0 έχει ακριβώς μια αρνητική ρίζα στο (-∞, 0).

ii) Αφού f γν. αύξουσα τότε για κάθε $x>x_0$ ισχύει $f(x)>f(x_0)=0$

άρα $f^2(x)>0$ και $-x_0f(x)>0$, οπότε $f^2(x)-x_0f(x)>0$

άρα η εξίσωση $f^2(x)-x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Γ4.



Την $t=t_0$ είναι $x(t_0)=3$ μον. και $x'(t_0)=2$ μον./sec

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{x \cdot (x^2+1)}{2} = \frac{x^3+x}{2}$$

Άρα $E = E(t) = \frac{x^3(t)+x(t)}{2}$

$$E'(t) = \frac{1}{2}(3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t))$$
$$E'(t_0) = \frac{1}{2}(3 \cdot 9 \cdot 2 + 2) = \frac{1}{2} \cdot 2(27 + 1) = 28\ \tau.\mu/sec$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in R$ έχουμε

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x - 1) \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} + a$$
$$= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x - 1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

Επειδή η ευθεία (ε): y= -x+2 εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της Α(1, 1) τότε f(1)=1 και f ΄(1)= -1⇔α+β=1 και α= -1⇔α= -1 και β=2.

Δ2. Για α= -1 και β=2 είναι f(x)=(x-1)ln(x2-2x+2)-x+2, $x \in R$

Έχουμε f(x)-(-x+2)=(x-1)ln(x^2-2x+2)-x+2-(-x+2)=(x-1)ln(x^2-2x+2)≥0 για κάθε $x \in [1, 2]$

Αφού x^2-2x+2=$(x-1)^2$+1≥1, $x \in [1, 2]$ οπότε ln(x^2-2x+2)≥0

Άρα

$$E(\Omega) = \int_1^2 \big(f(x) - (-x + 2)\big)dx = \int_1^2 (x - 1)\ln(x^2 - 2x + 2)\, dx$$

Θέτουμε u=x^2-2x+2

du=2(x-1)dx

Για x=1: u=1

Για x=2: u=2

Άρα

$$E(\Omega) = \frac{1}{2}\int_1^2 lnudu = \frac{1}{2}\int_1^2 (u)'lnudu = \frac{1}{2}[ulnu]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 u \cdot (lnu)'du =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (2ln2 - ln1) - \frac{1}{2}\int_1^2 1du = ln2 - \frac{1}{2}[u]_1^2 = \left(ln2 - \frac{1}{2}\right)\tau.\mu.$$

Δ3. i) Για κάθε $x \in R$ έχουμε

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \ln(\mathrm{x}^2 - 2x + 2) + \frac{2(x - 1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 =$$
$$= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} =$$
$$= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{(x^2 - 2x + 2) - 2}{x^2 - 2x + 2} =$$
$$= \ln(x^2 - 2x + 2) + 1 - \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$$

Αφού x^2-2x+2=$(x-1)^2$+1≥1, $x \in R$

Τότε ln (x^2-2x+2)≥0 (1) και

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2 - 2x + 2} \ge -2 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2 - 2x + 2} \ge -1 \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι f ΄(x)≥-1 για κάθε $x \in R$.

ii) Για κάθε $\lambda \in R$ θα δείξουμε ότι

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda \geq (\lambda-1)ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda \geq [f(\lambda)+\lambda-2]+\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

Η f είναι συνεχής στο [λ, λ+1/2] και παραγωγίσιμη στο (λ, λ+1/2) για κάθε $\lambda \in R$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\lambda, \lambda+1/2)$ τέτοιο ώστε:

$$\xi'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-\lambda}=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Αφού $f'(x) \geq -1$, $x \in R$ τότε

$$f'(\xi) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)= -3x^2-1$

Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο σημείο της $(x_1, f(x_1))$ έχει εξίσωση

ε_1: $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow y=f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1)$.

Η εφαπτομένη της Cg στο σημείο της $(x_2, g(x_2))$ έχει εξίσωση

ε_2: $y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y=g'(x_2)x+g(x_2)-x_2g'(x_2)$

Οι Cf, Cg δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν οι ευθείες ε_1, ε_2 ταυτίζονται δηλαδή αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) \\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=g(x_2)-x_2\cdot g'(x_2) \quad (3) \end{cases}$$

Έχουμε $f'(x_1)=g'(x_2) \Leftrightarrow$

$$f'(x_1)=-3x_2^2-1 \Leftrightarrow$$
$$f'(x_1)+1+3x_2^2=0 \quad (4)$$

Αφού

$$f'(x_1)+1 \geq 0 \; \kappa\alpha\iota \; 3x_2^2 \geq 0$$

Έχουμε

$$(4) \Leftrightarrow f'(x_1)+1=0 \; \kappa\alpha\iota \; 3x_2^2=0$$
$$\Leftrightarrow f'(x_1)=-1 \; \kappa\alpha\iota \; x_2=0$$

Αφού $f'(x) \geq -1$, $x \in R$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=1) τότε $x_1=1$

Οι τιμές $x_1=1$ και $x_2=0$ επαληθεύουν την (3).

Άρα $x_1=1$, $x_2=0$ η μοναδική λύση του συστήματος.

Οπότε $A(1, 1) \in Cf$ και $B(0, 2) \in Cg$

Άρα η ευθεία (ε): y= -x+2 είναι η εξίσωση της μοναδικής κοινής εφαπτομένης.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΚΑΙ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.

www.floropoulos.gr